

## Дополнительные главы алгебры. Задачи к семинару 4.

**Задача 1.** (а) Зная разложение конечной абелевой группы в прямую сумму примарных, найдите в ней циклическую подгруппу максимального порядка.

(б) Зная жорданову нормальную форму линейного оператора, найдите его минимальный многочлен.

**Задача 2.** Объясните, как, зная жорданову нормальную форму линейного оператора, (а) найти композиционный ряд соответствующего  $\mathbb{C}[x]$ -модуля; (б) разложить соответствующий  $\mathbb{C}[x]$ -модуль в прямую сумму неразложимых.

**Задача 3.** (а) Приведите пример бесконечнопорожденного неразложимого  $\mathbb{Z}$ -модуля. (б) ... не содержащего свободных подмодулей.

(в) Те же вопросы для  $\mathbb{C}[x]$ -модулей.

**Задача 4.** Опишите с точностью до изоморфизма все модули  $M$  над  $\mathbb{C}[x, y]$ , такие, что (а)  $\dim_{\mathbb{C}} M = 2$ ; (б)\*  $\dim_{\mathbb{C}} M = 3$ .

**Задача 5.** (а) Найдите композиционные ряды модулей из предыдущей задачи.

(б) Разложите модули из предыдущей задачи в прямые суммы неразложимых.

**Задача 6.** (а) Опишите все  $\mathbb{Z}[x]$ -модули порядка 3 и 9 с точностью до изоморфизма.

(б)\* Тот же вопрос для порядка 27.

(в) Найдите композиционные ряды всех этих модулей.

(г) Разложите эти модули в прямые суммы неразложимых.

**Задача 7.** (а) Опишите все расширения  $\mathbb{Z}$ -модуля  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  при помощи  $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$  с точностью до изоморфизма.

(б) Тот же вопрос для  $\mathbb{C}[x]$ -модулей  $\mathbb{C}[x]/(x^2 - 1)$  и  $\mathbb{C}[x]/(x^2 - x)$ .