Материалы к семинарам по матанализу (четвёртый семестр)

5-я и 6-я недели (11 — 22.02.2019)

Примерные задачи семинаров

Поточечная сходимость рядов Фурье

В лекциях будет доказана теорема

Теорема 1. *Пусть функция на отрезке имеет конечное число точек разрыва первого рода. Пусть она непрерывно дифференцируема в точках непрерывности и ее производная имеет одностороние пределы, равные односторонним производным в точках разрыва функции. Тогда ряд Фурье этой функции сходится к ней в точках непрерывности, и к среднему арифметическому ее односторонних пределов в точках разрыва.*

Задача 3.1. Разложите в ряд Фурье (по какому базису удобнее?) функцию $\operatorname{sgn} x$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Задача 3.2. Пользуясь предыдущей задачей, найдите сумму ряда Лейбница: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$.

Почленное интегрирование рядов Фурье

Задача 3.3. Докажите, что ряд Фурье функции из $L_2[-\pi, \pi]$ с нулевым средним можно почлено интегрировать: если

$$f(x) = \sum_{k \neq 0} a_k e^{ikx}, \qquad g(x) = \int_0^x f(t)\, dt,$$

то

$$g(x) = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{ik} a_k (e^{ikx} - 1).$$

Замечание 1. *При сделанных слабых предположениях на функцию f мы не можем утверждать, что $g' = f$ всюду. На самом деле, $g' = f$ почти всюду.*

Задача 3.4. Докажите аналогичное утверждение для рядов Фурье по системе SC.

Задача 3.5. Разложите в ряд Фурье функцию x на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Задача 3.6. Пусть функции f и g — те же, что и выше, но функция f имеет ненулевое среднее. Как найти ряд Фурье функции g по ряду для функции f?

Задача 3.7. а) Найдите разложение в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции $|x|$, пользуясь результатом задачи 3.1.
б) Тот же вопрос для $x|x|$.
в) Найдите разложение в ряд Фурье функции x^2, пользуясь результатом задачи 3.5.
Тот же вопрос для г) x^3;   д) x^4;   е) x^5.

Задача 3.8. а) Докажите, что если коэффициенты Фурье убывают как $n^{-1-\varepsilon}, \varepsilon > 0$, то сумма ряда — непрерывная функция.
б) Докажите, что если коэффициенты Фурье убывают как $n^{-k-\varepsilon}, \varepsilon > 0$, то сумма ряда — k раз непрерывно дифференцируемая функция.

Задача 3.9. а) Пусть $2\pi S_n(x) = (1/2) + \cos x + \dots + \cos nx$. Найдите компактное выражение и среднее значение для $S_n(x)$ на $[-\pi, \pi]$.
б) Пользуясь леммой Римана, докажите, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|\in[\varepsilon,\pi]} S_n(x)\,dx \to 0. \tag{1}$$

в) Как связаны функции

$$f_n(y) = \int_{[-\pi,\pi]} S_n(x-y) f(x)\,dx$$

с рядом Фурье функции f?

Замечание 2. *Последовательность S_n очень похожа на δ-образную: $\int_{[-\pi,\pi]} S_n\,dx = 1$ и выполнено (1). Более того, $\int_{[-\pi,\pi]} S_n(x-y)f(x)\,dx \to f(y)$ для любой C^1-гладкой f. Однако доказать аналогичное утверждение для непрерывной функции f долго не удавалось. Доказательство сходимости почти всюду ряда Фурье непрерывной функции — одна из вершин математики 20 века (Ленарт Карлесон, 1966).*