Лекция 5-19. Интегралы, зависящие от параметра (продолжение). Преобразование Фурье (начало)

1 Несобственные интегралы, зависящие от параметра.

Определение 1 *Скажем, что функция $\mathcal{F} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ мажорирует семейство $\{f_y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+|,\ y \in A\}$, если существует такое x_0, что $|f_y(x)| \le \mathcal{F}(x) \forall x > x_0,\ y \in A$.*

thm:3 **Теорема 1** *Пусть $\mathcal{F}$ мажорирует непрерывное по параметру y семейство функций $\{f_y \in C(\mathbb{R}^+)|y \in [0,1]\}$, и интеграл $\int_0^\infty \mathcal{F}(x)dx$ сходится. Тогда возможно интегрирование под знаком интеграла. А именно, пусть*

$$g(y) = \int_0^\infty f_y(x)dx,\ f_y(x) = f(x,y) \tag{1}$$ eqn:5

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = f_y(x), \tag{2}$$ eqn:6

$$G'(y) = g(y),\ G(0) = \int_0^\infty F(x,0)dx. \tag{3}$$ eqn:7

Тогда

$$(8) \qquad G(y) = \int_0^\infty F(x,y)dx \tag{4}$$ eqn:8

Доказательство Пусть для простоты $a = 0,\ b > 0$. Интегралы в правой части (5) сходятся по признаку сравнения. Рассмотрим

$$g_N(y) = \int_0^N f(x,y)dx$$

$$G_N'(y) = g_N(y),\ G_N(0) = \int_0^N F(x,0)dx.$$

По теореме 3,

$$G_N(y) = \int_0^N F(x,y)dx$$

Далее, выберем N так, что

$$\int_N^\infty \mathcal{F}(x)dx < \varepsilon.$$

Тогда

$$\left|\int_N^\infty f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

$$\left|\int_0^y dt \int_N^\infty f(x,t)dx\right| < \varepsilon y$$

Значит,

$$|g_N(y) - g(y)| < \varepsilon y$$

$$|G_N(y) - G(y)| < \varepsilon y.$$

$$\int_0^y g_N(t)dt - G_N(y) = 0$$

по теореме 3. Следовательно,

$$\left|\int_0^y g(t)dt - G(y)\right| < 2\varepsilon y \forall \varepsilon.$$

Поэтому модуль в левой части равен нулю. □

2 Дифференциование под знаком несобственного интеграла

Теорема 2 *Пусть* $\mathcal{F}$ *мажорирует два семейства* $\{f_y \in C(\mathbb{R}^+) | y \in [a,b]\}$ *и* $\{\frac{\partial f_y}{\partial y} \in C(\mathbb{R}^+) | y \in [a,b]\}$*, непрерывных по параметру* y*, и пусть интеграл* $\int_0^\infty \mathcal{F}(x)dx$ *сходится. Тогда возможно дифференцирование под знаком интеграла. А именно, пусть*

$$G(y) = \int_0^\infty f_y(x)dx.$$

Тогда

$$G'(y) = \int_0^\infty \frac{\partial f_y}{\partial y}(x)dx.$$

Эта теорема выводится из теоремы 3 точно так же, как теорема 1 из теоремы 2.

3 Преобразование Фурье: определение и основные результаты

Преобразование Фурье - одно из важнейших применений интегралов, зависязих от параметра.

Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$. Преобразованием Фурье функции f называется функция

$$\tilde{f}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\alpha x}dx, \tag{5}$$

eqn:four

определенная, если интеграл в правой части существует. Если не оговорено противное, интеграл понимается как иснтеграл Лебега; в частности, функция под интегралом должна быть суммируема на прямой.

Нормированным преобразованием Фурье функции f называется функция

$$\hat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tilde{f} \qquad (6)$$ eqn:norm

Из формулы очевидно, что преобразование Фурье существует для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$. Мы докажем ниже, что $\tilde{f} \in L_2(\mathbb{R})$.

Основные результаты сегодняшней лекции таковы:

thm:1 **Теорема 3 (Равенство Планшереля)** *$f \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in L_2(\mathbb{R})$, и $||f|| = ||\hat{f}||$.*

thm:2 **Теорема 4** *Формула обращения: пусть одновременно $f \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$ и $\tilde{f} \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$. Тогда для почти всех x*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha$$

Мы докажем эти теоремы сначала для случая, когда функция f – финитная дважды гладкая, а затем распространим их на все $L_2(\mathbb{R})$.

Преобразование Фурье является континуальным аналогом ряда Фурье. Ряды Фурье определены для функций на окружности, а преобразование Фурье – для функций на прямой. Второе получается из первого предельным переходом по семейству окружностей, длина которых стремится к бесконечности.

4 Убывание преобразования Фурье финитной гладкой функции

thm:decr **Теорема 5** *Преобразование Фурье финитной функции класса C^m убывает не медленнее, чем $|x|^{-m}$.*

Эта теорема доказывается точно так же, как ее аналог для рядов Фурье.

Доказательство Преобразование Фурье переводит дифференцирование в умножение на $i\alpha$:

$$\tilde{f'}(\alpha) = i\alpha\tilde{f}(\alpha). \qquad (7)$$ eqn:mult

Эта формула доказывается с помощью интегрирования по частям. Интегралы пишутся по прямой (и это не указано в обозначениях), но берутся по отрезку, вне которого функция f равна нулю. Возникающие двойные подстановки исчезают, поскольку $f = 0$ на концах отрезка. Иногда преобразование Фурье обозначают символом

$\mathcal{F}: \ \tilde{f} = \mathcal{F}f.$

$$\mathcal{F}(f')(\alpha) = \int f'(x)e^{-i\alpha x}dx = \int e^{-i\alpha x}df(x) = -\int f(x)de^{-i\alpha x}dx = i\alpha\int f(x)e^{-i\alpha x}dx = i\alpha\mathcal{F}f(\alpha).$$

Отсюда следует:

$$\mathcal{F}f(\alpha) = \frac{1}{i\alpha}\mathcal{F}(f')(\alpha).$$

Индукцией по m получаем:

$$\mathcal{F}f(\alpha) = \frac{1}{(i\alpha)^m}\mathcal{F}(f^{(m)})(\alpha).$$

Но функция $\mathcal{F}(f^{(m)})$ ограничена, поскольку $f^{(m)}$ непрерывна и финитна. $\square$

cor:1 **Следствие 1** *Если $f \in C^{2,0}$, то существует C:*

$$|\tilde{f}(\alpha)| < \frac{C}{1+\alpha^2}. \tag{8}$$ eqn:esti