Лекция 4-19. Теоремы о приближении. Интегралы, зависящие от параметра

1 Важные δ-образные последовательности.

Пусть $\varphi \in C^{2,0}(\mathbb{R})$ – *унимодулярная* функция, $\varphi(0) = 1$. Унимодулярность значит, что $\text{sign } \varphi' = -\text{sign } x$ на множестве, где функция не равна нулю. График функции φ напоминает колокол, поставленный на ось абсцисс, φ имеет максимум в нуле.

thm:3 **Теорема 1** *Пусть φ - описанная выше унимодулярная функция. Положим:*

$$\Delta_n = \frac{\varphi^n}{\int_{\mathbb{R}} \varphi^n(x)dx}. \tag{1}$$ eqn:2

Тогда Δ_n – δ-образная последовательность.

Доказательство Из унимодулярности φ следует неотрицательность:

$$\varphi \geq 0.$$

Кроме того, $\varphi(x) < 1 \ \forall x \neq 0$.

Требование b определения 1 $\int_{\mathbb{R}} \Delta_n(x)dx \to 1$ выполнено по определению. Осталось проверить требование c.

Для любого ε

$$\max_{|x|\geq\varepsilon} \varphi(x) = q(\varepsilon), 0 < q(\varepsilon) < 1.$$

Положим: $I_n = \int \varphi^n(x)dx$. На множестве $|x| \geq \varepsilon$,

$$|\Delta_n(x)| \leq \frac{q^n(\varepsilon)}{I_n} := \lambda_n(\varepsilon). \tag{2}$$ eqn:frac

Тогда

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \Delta_n(x)dx \leq \lambda_n(\varepsilon)|\text{supp } \varphi|.$$

prop:zero **Предложение 1** *В условиях теоремы, $\lambda_n(\varepsilon) \to 0$ $\varepsilon > 0$.*

Теорема 1 немедленно следует из предложения 1. □

Доказательство [предложения 1.] Фиксируем $\varepsilon > 0$. Числитель дроби стремится к нулю экспоненциально. Докажем, что знаменатель больше некоторой отрицательной степени n: существует такое c, что

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi^n(x)dx \geq \frac{c}{\sqrt{n}}. \tag{3}$$ eqn:int

для всех достаточно больших n. Тогда дробь (2) стремится к нулю, потому что экспонента убывает быстрее любой степени.

Из унимодулярности функции φ следует, что для малых $x : |x| \leq x_0$, существует такое C, что

$$\varphi(x) \geq 1 - Cx^2.$$

Тогда при больших n, имеем: $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < x_0$,

$$\varphi(x) \geq 1 - \frac{C}{n}.$$

Следовательно, при $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$,

$$\varphi^n(x) \geq \left(1 - \frac{C}{n}\right)^n = i_n.$$

Имеем:

$$i_n \to e^{-C} \text{ при } n \to \infty$$

Поэтому,

$$I_n \geq 2\frac{i_n}{\sqrt{n}} > \frac{c}{\sqrt{n}}$$

при достаточно большом n, где

$$c = 3^{-C}.$$

Это доказывает предложение. □

Замечание 1 *Теорема 1 верна, если φ - такая же, как в теореме, только имеет изломы на концах отрезка, вне которого равна нулю.*

2 Примеры.

Возьмем

$$\varphi(x) = (1 - x^2)\chi_{[-1,1]}. \quad (4)$$ eqn:poly

Последовательность (8) с таким φ является δ-образной. Эта последовательность важна потому, что на множестве $|x - y| < 1$, функция $\Delta_n(x - y)$ – многочлен по y.

Возьмем

$$\varphi(x) = (\cos x + 1)\chi_{[-\pi,\pi]}. \quad (5)$$ eqn:trig

Последовательность (8) с таким φ тоже является δ-образной. Каждая функция этой последовательности – тригонометрический многочлен по y при $|x - y| < \pi$.

Возьмем

$$\varphi(x) = \cos\frac{x}{2}\chi_{[-\pi,\pi]}. \quad (6)$$ eqn:trig

Последовательность (8) с таким φ тоже является δ-образной.

Первая и третья δ-образные последовательности используются при доказательстве теорем Вейерштрасса.

3 Приближение многочленами

thm:wer **Теорема 2 (Вейерштрасс)** *Непрерывную функцию на отрезке можно равномерно приблизить многочленами.*

Доказательство Берем $\Delta_n(x) = P_n(x)\chi_{[-1,1]} \sim \delta$-образную; $P_n(x)$ – многочлен. Эта последовательность дается формулами (8), (4). Тогда

$$\Delta_n(x-y) = P_n(x-y)\chi_{[-1+y,1+y]}$$

При фиксированном x, $P_n(x-y) = \Sigma_0^{2n} a_k(x)y^k$. Далее, $\Delta_n(x-y) = \Sigma a_k(x)y^k$, если $|x-y| \le 1$. Берем финитную функцию $f \in C^0$, $\operatorname{supp} f \subset [0,1]$ При $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$ имеем: $|x-y| \le 1$. Следовательно, при таких x и y, $\Delta_n(y-x) = \Sigma_0^{2n} a_k(x)y^k$. Далее, для любого y,

$$f_n(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\Delta_n(x-y)dx = \int_0^1 f(x)\Sigma_0^{2n} a_k(x)y^k dx = \Sigma_0^{2n} b_k Y^k,\ b_k = \int_0^1 f(x)a_k(x)dx.$$

По теореме 1, $f_n(y) \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}$. Но на отрезке $[0,1]$ функции f_n – многочлены.

Мы научились приближать многочленами непрерывные функции на отрезке, равные нулю на его концах. Общий случай сводится к этому добавлением к приближаемой непрерывной функции подходящего многочлена первой степени. □

4 Приближение тригонометрическими многочленами

Теорема 3 *Любая непрерывная функция на $[-\pi,\pi]$ с одинаковыми значениями на концах может быть (равномерно) приближена тригонометрическими многочленами.*

Доказательство Без ограничения общности можно считать, что приближаемая функция равна нулю на концах отрезка $[-\pi,\pi]$. Если это не так, из нее можно вычесть подходящую константу, а затем продолжить нулем на всю прямую. Докажем теперь, что финитную непрерывную функцию на прямой с носителем на отрезке $[0,\pi]$ можно равномерно приблизить на этом отрезке многочленами от $\cos\frac{x}{2}, \sin\frac{x}{2}$.

Доказательство аналогично предыдущему, только $\Delta_n(x) = \frac{(\cos\frac{x}{2})^n}{I_n}\chi_{[-\pi,\pi]}$, где $I_n = \int_{-\pi}^{\pi}(\cos\frac{x}{2})^n dx$. В предыдущем доказательстве $[-1,1]$ заменяется на $[-\pi,\pi]$, а $[0,1]$ на $[0,\pi]$. Получается, что непрерывные функции на отрезке $[0,\pi]$ равномерно приближаются многочленами от $\cos\frac{x}{2}, \sin\frac{x}{2}$. Следовательно, непрерывные функции на отрезке $[0,2\pi]$ равномерно приближаются многочленами от $\sin x, \cos x$. □

Из этой теоремы следует, что непрерывные вещественные функции на $[0, 2\pi]$ равномерно приближаются гармониками (так называются функции из базиса E). То же верно и для комплексно-значных функций (нужно приближать отдельно вещественную и мнимую части). Но непрерывные функции плотны в L_2. Значит, система E полна в $L_2(0, 2\pi])$. Теперь мы можем применить теорему Рисса и доказать, что ряд Фурье функции из $L_2(0, 2\pi])$ сходится к ней в метрике этого пространства.

5 Собственные интегралы, зависящие от параметра

Функции f_n в разделе 3 - это частный случай интегралов, зависящих от параметра. Рассмотрим теперь общий случай.

Имеем:

$$f : K = I \times I \to \mathbb{R},\ f \in C^1(K). \tag{7}$$ eqn:1

Рассмотрим

$$g(y) = \int_0^1 f(x, y)dx. \tag{8}$$ eqn:2

Верно ли, что $g \in C^1(K)$? ДА!

thm:1 **Теорема 4 (Дифференцирование под знаком интеграла)** *В условиях* (1), (2), $g \in C^1(K)$ *и* $g'(y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$.

6 Что легче, дифференцировать или интегрировать?

thm:2 **Теорема 5 (Интегрирование под знаком интеграла)** *Рассмотрим* $\varphi : K \to \mathbb{R},\ \varphi \in C(K)$. *Пусть*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \varphi,\ \Phi(x, 0) = 0,\ \psi(y) = \int_0^1 \varphi(x, y)dx, \quad \Psi'(y) = \psi,\ \Psi(0) = 0. \tag{9}$$ eqn:3

Тогда

$$\Psi(y) = \int_0^1 \Phi(x, y)dx \tag{10}$$ eqn:4

[Можно интегрировать под знаком интеграла]

Доказательство теоремы 5. Повторный интеграл непрерывной функции по прямоугольнику не зависит от порядка интегрирования. □

Более подробное доказательство.

По формуле Ньютона-Лейбница,

$$\Phi(x, y) = \int_0^y \varphi(x, t)dt,\ \Psi(y) = \int_0^y \psi(t)dt.$$

Тогда

$$\Psi(y) = \int_0^y \psi(t)dt = \int_0^y dt \int_0^1 \varphi(x,t)dx = \int_0^1 dx \left(\int_0^y \varphi(x,t)dt \right) = \int_0^1 \Phi(x,y)dx,$$

ч.т.д.

Но если можно интегрировать под знаком интеграла, значит можно и дифференцировать! Это доказывает теорему 4.

7 Более подробное доказательство теоремы 4

Доказательство Согласуем обозначения теоремы 4 с обозначениями предыдущей. Положим

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \varphi(x,y), \quad f(x,y) = \Phi(x,y) + f(x,0).$$

Тогда:

$$\psi(y) = \int_0^1 \varphi(x,y)dx = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx,$$

$$g(y) = \int_0^1 f(x,y)dx = \int_0^1 \Phi(x,y)dx + \int_0^1 f(x,0)dx = \Psi(y) + \int_0^1 f(x,0)dx.$$

В силу Теоремы 5,

$$\Psi'(y) = \psi(y).$$

Значит,

$$g'(y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

□

Следствие 1 *При наличии необходимых производных,*

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx + b'(y)f(b(y),y) - a'(y)f(a(y),y).$$

Доказательство Применим теорему о дифференцировании сложной функции к $F(a,b,y) = \int_a^b f(x,y)dx$ и воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница. □