Теория функций комплексного переменного – 2019
Листок 2

срок сдачи 26.02.2019

1. Найдите голоморфную функцию взаимно-однозначно отображающую внутренность единичного диска $|z|<1$ на внешность эллипса $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Найдите конформное отображение $z \mapsto w = f(z)$ верхней полуплоскости $\mathrm{Im} z > 0$ на внутренность диска $|w| < R$ такое чтобы выполнялось $f(i) = 0$, $f'(i) = 1$ и найдите значение R.

3. Докажите, что если модуль голоморфной в области D и непрерывной в замыкании $\overline{D}$ функции f постоянен на границе ∂D, то f имеет хотя бы один ноль в D.

4. На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ найдите выражения для переменных $z, \overline{z}$, 1-форм $dz, d\overline{z}$ и векторных полей (дифференцирований) $\partial_z, \partial_{\overline{z}}$ через координаты x, y, 1-формы dx, dy и поля ∂_x, ∂_y, найдите также обратные выражения и запишите в комплексных переменных оператор Лапласа $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ и форму объёма $\omega = dx \wedge dy$.

5. Покажите, что если функции f, g голоморфны в области D и не имеют в ней общих нулей, то в этой области

$$\Delta \ln \left(|f|^2 + |g|^2\right) \geqslant 0.$$

6. Найдите условие на дифференцируемую по вещественным аргументами функцию $f(z, \overline{z})$ необходимое и достаточное для коммутирования векторных полей $\mathrm{Re}\big(f(z, \overline{z})\partial_z\big)$ и $\mathrm{Im}\big(f(z, \overline{z})\partial_z\big)$.

7. Пусть f голоморфная в области D функция с простыми нулями. Опишите поведение модуля и аргумента f на фазовых кривых уравнения

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{f(z)}{f'(z)}$$

Какой тип имеет фазовый портрет данного поля в окрестности нуля $f(z)$?

8. Пусть f непрерывная вещественнозначная в в круге $|z| \leqslant 1$ функция и выполняется $|f| \leqslant 1$. Докажите что

$$\left| \oint_{|z|=1} f(z) dz \right| \leqslant 4$$

9. Докажите, что если f непрерывно дифференцируема по вещественным переменным x, y в окрестности замыкания ограниченной области D, то в этой области

$$f(z, \overline{z}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta, \overline{\zeta})}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}}{\zeta - z} d\xi d\eta, \qquad \zeta = \xi + i\eta$$

10. Пусть $P(z)$ многочлен. Докажите, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=R} P(z) d\overline{z} = -R^2 P'(a)$$