

# ЛЕКЦИЯ 3. АНАТОМИЯ ГРУППЫ $G_n$

А.А.КИРИЛЛОВ

## 1. ПРЕДИСЛОВИЕ

Множество треугольных матриц - один из фундаментальных объектов в математике (такой же, как множество натуральных чисел или группа перестановок). На нём можно ввести много разных структур, взаимодействие между которыми очень интересно и приводит к многим замечательным открытиям.

Наша главная цель - понять строение группы  $G_n$  верхних унитарных  $n \times n$ -матриц.<sup>1</sup> Эксперименты показывают, что ответ мало зависит от выбора основного поля  $K$ . Поэтому возникает заманчивая идея попытаться понять ответ в главных случаях  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ , изучив сначала случай конечного поля  $\mathbb{F}_q$ , когда наша группа конечна.

## 2. ТРЕУГОЛЬНАЯ ГРУППА И ЕЁ АЛГЕБРА ЛИ

Задача описания классов сопряжённости группы  $G_n$  довольно сложна и всё ещё остаётся открытой проблемой. Однако, есть, по меньшей мере, два более **грубых** отношения эквивалентности между элементами группы, которые проще исследовать.

Одно из них заменяет присоединённое действие группы  $G$  на её алгебре Ли

$$\mathfrak{g} : (g) : X \mapsto gXg^{-1}$$

двусторонним действием  $G \times G$

$$A(g_1, g_2) : X \mapsto g_1Xg_2^{-1}.$$

Поэтому, вместо **присоединённых** орбит в  $\mathfrak{g}$ , соответствующих классам сопряжённости в  $G$ , мы получаем, так называемые, **суперклассы**, которые описать и классифицировать уже гораздо проще. Этот подход был независимо разработан моим бывшим учеником Нинь Янгом (Ning Yang) [?NY] и Карлосом Андрэ (Carlos Andre) [?CA]. См. обзорную статью 27 авторов [?28].

---

*Date:* Jan 2019.

<sup>1</sup>Эта группа часто обозначается  $UT_n$  или  $N_n$ . В этой лекции мы используем обозначение  $G_n$  для группы и  $\mathfrak{g}_n$  для её алгебры Ли.

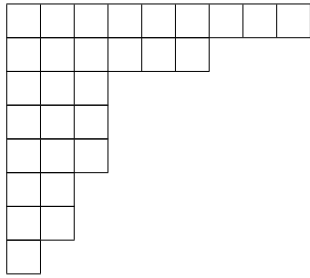
Второй подход связан с теоремой Жордана о классах сопряжённости в  $GL(n)$ , который для треугольных групп его разработали Спрингер (T.Springer) и Герстенхабер (M. Gerstenhaber). Интересные новые подробности недавно были представлены в статьях Анной Мельниковой [?].

### 3. ТЕОРИЯ СПРИНГЕРА

**3.1. Разбиения.** Рассмотрим представление натурального числа  $n$  как (неупорядоченную) последовательность натуральных слагаемых. Оно называется **разбиением** и обозначается как

$$(1) \quad \lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_s) \quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^s \lambda_i = n \quad \lambda\text{-обозначение}$$

Пусть  $\mathcal{P}_n$  обозначает число всех разбиений  $n$ . Удобное наглядное представление разбиения  $\lambda$  это, так называемая, **диаграмма Юнга**  $D = D(\lambda)$ , из  $n$  клеток записанных в виде  $s$  строк длин  $\lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ :



для  $\lambda = (9, 6, 3, 3, 3, 2, 2, 1)$ .

Длины столбцов в  $D(\lambda)$  образуют так называемое **двойственное разбиение**

$$\lambda^* = (\lambda_1^* \geq \lambda_2^* \geq \dots \geq \lambda_t^*)$$

того же числа  $n$ . Для примера выше  $\lambda^* = (8, 7, 5, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$ . (Вопрос для самоконтроля: ясно ли что  $s = \lambda_1^*$ ,  $t = \lambda_1$ ?)

Есть ещё два способа записать разбиение  $\lambda$  - использовать два символических обозначения;

$$\alpha\text{-обозначение} : \quad \lambda = 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}, \quad \text{где} \quad \sum_{k=1}^n k \alpha_k = n;$$

здесь  $\alpha_k = \alpha_k(\lambda)$  - количество частей  $\lambda_i$  размера  $k$ . В рассмотренном выше случае,

$$\lambda = 1^1 2^2 3^3 4^0 5^0 6^1 7^0 8^0 9^1, \quad \lambda^* = 1^3 2^3 4^0 5^1 6^0 7^1 8^1, \quad n = 29.$$

$$\mu\beta\text{-обозначение} : \quad \lambda = \mu_1^{\beta_1} \mu_2^{\beta_2} \dots \mu_m^{\beta_m}, \quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^m \beta_i \mu_i = n;$$

здесь мы предполагаем  $\mu_1 > \dots > \mu_m > 0$  (и не пишем степени  $\beta_i = 1$ ); для примера выше:  $\lambda = 963^3 2^2 1$ ,  $\lambda^* = 8752^3 1^3$ .

**Предостережение.** Числа  $\mu_i$  в  $\mu\beta$ -обозначении, отличаются из чисел  $\lambda_i$  из (1): мы избегаемся от повторов, упоминая каждое число лишь единожды. Степени  $\beta$ 's это просто ненулевые  $\alpha$ 's.

Следующие соотношения должны быть очевидны (прямо следуют из определений если нарисовать картинку):

$$(2) \quad \begin{array}{l} a) \lambda_k^* = \#\{i \mid \lambda_i \geq k\}, \quad b) \lambda_k^* - \lambda_{k+1}^* = \alpha_k(\lambda), \\ c) \lambda_i = \mu_k \text{ и } \alpha_{\lambda_i} = \beta_k \text{ для } i \in (\beta_1 + \dots + \beta_{k-1}, \beta_1 + \dots + \beta_k]. \end{array}$$

**3.2. Жордановы типы треугольных матриц.** Всякая матрица  $g \in G_n(F)$  имеет форму  $g = 1 + A$ , где  $A \in \mathfrak{g}_n$  верхнетреугольная нильпотентная  $n \times n$ -матрица с  $A^n = 0$ . Хорошо известно, что при подходящем выборе базиса  $A$  принимает блочно-диагональную форму с диагональными блоками вида:

$$J_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Размеры  $\lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , этих **Жордановых клеток**, определены однозначно с точностью до порядка. Таким образом, они образуют **разбиение**  $\lambda \in \mathcal{P}_n$ . Мы называем это разбиение **Жордановым типом** нильпотентной матрицы  $A$  и обозначаем его как  $J(A)$ . Множество всех матриц типа  $\lambda$  в  $\mathfrak{g}$  обозначается  $\mathfrak{g}_\lambda$ .

**3.3. Как вычислить  $J(A)$  для данной  $A \in \mathfrak{g}$ .** Очевидными инвариантами матрицы  $A$  при сопряжении являются ранги степеней матрицы  $A$ . Известно, что для нильпотентных матриц  $A \in \text{Mat}(n, K)$  это полная система инвариантов: две нильпотентные матрицы сопряжены тогда и только тогда, когда их степени имеют одинаковые ранги. На самом деле, в случае  $n \times n$ -матриц достаточно проверить это условие для степеней  $1, 2, \dots, n-1$ . Обозначим  $\text{rk}(A^k)$  как  $r_k(A)$ . Удобно положить  $A^0 = 1$ . Тогда для всякого  $A \in \mathfrak{g}_n$  имеем

$$n = r_0(A) > r_1(A) \geq \dots \geq r_{n-1}(A) \geq r_n(A) = 0.$$

Соотношения между последовательностью  $\{r_k(A)\}$  и Жордановым типом  $A$  выглядят так:

**Лемма 1.** Пусть  $J(A) = \lambda$ . Тогда для  $k \geq 1$  имеем соотношения:

$$(3) \quad r_{k-1}(A) - r_k(A) = \lambda_k^*, \quad r_{k-1}(A) - 2r_k(A) + r_{k+1}(A) = \alpha_k(\lambda).$$

**Доказательство:** Обозначим через  $J_n$  нильпотентную Жорданову клетку размера  $n$ . Чтобы написать формулы для рангов степеней  $(J_n)^m$ , введём для  $l \in \mathbb{Z}$  обозначения:

$$(l)_+ = \begin{cases} l, & \text{если } l > 0 \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \theta(l) := (l)_+ - (l-1)_+ = \begin{cases} 1, & \text{если } l > 0 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Используя эти обозначения, можно записать :  $r_k(J_n) = (n - k)_+$ . Из разложения  $A = \oplus_i J_{\lambda_i}$  получаем:  $r_k(A) = \sum_i (\lambda_i - k)_+$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} r_{k-1}(A) - r_k(A) &= \sum_i ((\lambda_i - k + 1)_+ - (\lambda_i - k)_+) \\ &= \sum_i \theta(\lambda_i - k + 1) = \#\{i \mid \lambda_i \geq k\} = \lambda_k^*. \end{aligned}$$

Мы доказали первое из отношений (3). Второе теперь следует из (2).  $\square$

Таким образом, тип  $J(A)$  определён последовательностью  $\{r_k(A)\}$ . Более того, из  $\lambda_k^* \geq \lambda_{k+1}^*$  следует что последовательность  $\{r_k(A)\}$  не только слабо убывает от  $n$  до нуля, но и выпукла:  $r_k(A) \leq \frac{r_{k-1}(A) + r_{k+1}(A)}{2}$ .

**Упражнение 1.** Покажите что выпуклая слабо убывающая последовательность, начинающаяся с  $r_0 = n$  и заканчивающаяся  $r_n = 0$ , должна выглядеть как

$$(4) \quad n = r_0 > r_1 > \dots > r_l = r_{l+1} = \dots = r_n = 0$$

для какого-то числа  $l$  между 0 и  $n$ .

**Указание.** Для  $k \in [1, \dots, n]$  "наклон"  $s_k := r_k - r_{k-1}$  отрицателен и становится всё более пологим. Он перестаёт меняться когда ранг становится 0.

**3.4. Соседние разбиения.** Будем говорить, что разбиения  $\lambda \in \mathcal{P}_n$  и  $\Lambda \in \mathcal{P}_{n+1}$  **соседние**, если диаграмма  $D(\Lambda)$  получается из  $D(\lambda)$  добавлением одной клетки. В этом случае мы пишем  $\lambda \rightarrow \Lambda$ , или, подробнее,  $\lambda \xrightarrow{(i,j)} \Lambda$ , когда дополнительная клетка находится в  $i$ -ой строке и  $j$ -ом столбце. Такие пары разбиений естественным образом появляются если рассматривать матрицу  $\mathcal{A} \in \mathfrak{g}_{n+1}$  формы

$$(5) \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A \in \mathfrak{g}_n, \quad a \in K^n.$$

**Теорема 1.** Пусть  $A \in \mathfrak{g}_n$  Жорданов тип  $\lambda \in \mathcal{P}_n$  и  $\mathcal{A} \in \mathfrak{g}_{n+1}$  определяется как в (5) для некоторого  $a \in K^n$ . Тогда

- Разбиение  $\Lambda = J(\mathcal{A}) \in \mathcal{P}_{n+1}$  соседнее по отношению к  $\lambda$ .
- Если  $\Lambda$  соседствует с  $\lambda$ , тогда множество всех  $a \in K^n$  для которых  $J(\mathcal{A}) = \Lambda$ , - непустое квазиаффинное алгебраическое многообразие вида  $K^t$ , или  $K^t \setminus K^s$ .

**Доказательство.** Для данной пары  $(A, a)$  и  $k \geq 0$  положим  $\delta_k = r_k(\mathcal{A}) - r_k(A)$ .

Поскольку  $\mathcal{A}^k = \begin{pmatrix} A^k & A^{k-1}a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , числа  $\delta_k$  могут принимать только два значения:

$$\delta_k = \begin{cases} 0, & \text{если последний столбец } \mathcal{A}^k \text{ линейно зависит от остальных} \\ 1, & \text{если он линейно независим.} \end{cases}$$

Определим подпространства  $W_k(A) \subset K^n$  при помощи  $W_0 := \emptyset$  и

$$(6) \quad W_k(A) = \{a \in K^n \mid A^{k-1}a \in \text{im}(A^k)\} \text{ для } k \geq 1.$$

Обозначим через  $w_k(A)$  размерность  $W_k(A)$ .<sup>2</sup> Поскольку эта размерность зависит лишь от типа  $\lambda = J(A)$ , мы будем писать  $w_k(\lambda)$  вместо  $w_k(A)$ . Зависимость чисел  $\delta_k$  от  $a \in K^n$  выглядит следующим образом:

$$(7) \quad \delta_k = \begin{cases} 0, & \text{если } a \in W_k, \\ 1, & \text{если } a \notin W_k. \end{cases}$$

Заметим что из  $A^{k-1}a \in \text{im}(A^k)$  следует  $A^k a \in \text{im}(A^{k+1})$ . Значит, последовательность  $\{W_k\}$  не убывает:

$$\emptyset = W_0(A) \subset W_1(A) \subset \dots \subset W_n(A) \subset W_{n+1}(A) = K^n.$$

Значит,  $\delta_k = 0$  влечёт к  $\delta_{k+1} = 0$ . Поскольку  $\delta_0 = 1$  и  $\delta_{n+1} = 0$ , должно быть такое число  $s \in \{1, 2, \dots, n\}$  что

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & \text{для } k < s \\ 0, & \text{для } k \geq s. \end{cases}$$

Из (3) получается

$$(8) \quad \delta_{k-1} - \delta_k = \Lambda_k^* - \lambda_k^*, \quad \delta_{k-1} - 2\delta_k + \delta_{k+1} = \alpha_k(\Lambda) - \alpha_k(\lambda),$$

а, значит,

$$(9) \quad \Lambda_i^* - \lambda_i^* = \begin{cases} 1 & \text{для } i = s \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad \alpha_i(\Lambda) - \alpha_i(\lambda) = \begin{cases} -1, & \text{для } i = s - 1 \\ 1 & \text{для } i = s \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Первое соотношение показывает что столбцы  $D(\Lambda)$  имеют те же длины что и столбцы  $D(\lambda)$ , с одним исключением: в  $s$ -м столбце появляется дополнительная клетка.

Второе соотношение означает что одна из строк<sup>3</sup> заменяется строкой длины  $s$ . Пусть  $t$  - номер обновлённой строки. Тогда  $\lambda \xrightarrow{(t,s)} \Lambda$  и мы доказали часть а) Для доказательства б) нам потребуется явная формула для  $w_k(A)$ . Она получится из

**Лемма 2.**

$$(10) \quad w_k(A) = n - \lambda_k^*.$$

<sup>2</sup>Здесь удобно смотреть на пустое множество как на векторное пространство размерности  $-\infty$ . Тогда формула  $\#W_k(\mathbb{F}_q) = q^{w_k}$  истинна и для  $k = 0$ .

<sup>3</sup>На самом деле, это всегда первая (верхняя) из строк длины  $s - 1$

**Доказательство.** Оператор  $A^{k-1}$  отображает  $K^n$  в  $\text{im}(A^{k-1})$  и аннулирует подпространство  $\ker(A^{k-1})$  размерности  $n - r_{k-1}$ . Таким образом он устанавливает биекцию факторпространства  $K^n / \ker(A^{k-1})$  и  $\text{im}(A^{k-1})$ . Следовательно, прообраз  $\text{im}(A^k)$  в  $K^n / \ker(A^{k-1})$  имеет ту же размерность, что и  $\text{im}(A^k)$ , то есть  $r_k(A)$ .

Получается,  $W_k / \ker(A^{k-1})$  имеет размерность  $r_k(A)$  и мы получаем желаемое соотношение  $\dim W_k = n - r_{k-1}(A) + r_k(A) = n - \lambda_k^*$ .  $\square$

Будем использовать формулу (10) чтобы рекуррентно вычислить число точек в множестве  $\mathfrak{g}_\lambda(\mathbb{F}_q)$  всех матриц типа  $\lambda$  в  $\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)$ .

Пусть  $p_n : \mathfrak{g}_{n+1} \rightarrow \mathfrak{g}_n$  будет естественной проекцией, действующей удалением последнего столбца из каждой матрицы. Лемма 3 показывает что  $p_n(\mathfrak{g}_\Lambda) = \bigcup_{\lambda \rightarrow \Lambda} \mathfrak{g}_\lambda$ .

Для каждой пары соседних разбиений  $\lambda \xrightarrow{(t,s)} \Lambda$  выберем матрицу  $A \in \mathfrak{g}_\lambda$  и обозначим за  $C(A, \Lambda)$  множество всех  $a \in \mathbb{F}_q^n$  таких, что матрица  $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  будет типа  $\Lambda$ . Мощность  $C(A, \Lambda)$  одинакова для всех  $A$  Жорданова типа  $J(A) = \lambda$ ; обозначим её как  $c(\lambda, \Lambda)$ .

**Теорема 2.** *Используя  $\mu\beta$ -обозначения запишем  $\lambda$  в виде  $\mu_1^{\beta_1} \mu_2^{\beta_2} \cdots \mu_m^{\beta_m}$ , таких, что  $\mu_1 > \cdots > \mu_m > 0$  и  $\beta_i > 0$ . Если  $\lambda \xrightarrow{(t,s)} \Lambda$ , тогда*

$$(11) \quad c(\lambda, \Lambda) = \#(W_s \setminus W_{s-1}) = q^{n-\beta_1-\cdots-\beta_{s-1}}(1 - q^{-\beta_s}).$$

Доказательство следует из (9) и (10).

**Предложение 1** (Рекуррентная формула). *Числа точек в  $\mathfrak{g}_\lambda$  - это многочлены  $P_\lambda(q)$  от  $q$ , удовлетворяющие рекуррентным соотношениям.*

$$(12) \quad P_\Lambda(q) = \sum_{\lambda \rightarrow \Lambda} c(\lambda, \Lambda) P_\lambda(q) \quad \text{for all } \Lambda \in \mathcal{P}$$

**Пример 1.** Пусть  $\lambda = 9, 6, 3, 3, 3, 2, 2, 1$ . Возьмём матрицу  $A \in \mathfrak{g}_{29}$  типа  $\lambda$  и добавим к ней один столбец случайным образом (с  $q^{29}$  равновероятными возможностями). При этом с некоторой вероятностью  $p_k$  мы получим матрицу типа  $\Lambda^{(k)}$  с дополнительной клеткой в  $k$ -м столбце. Вероятность  $p_k$  зависит от  $k$ ,  $q$  и  $\lambda$ . В нашем примере только у 6 типов ненулевые вероятности:

$$\begin{aligned} \Lambda^{(1)} &= (10, 6, 3, 3, 3, 2, 2, 1), & \Lambda^{(2)} &= (9, 7, 3, 3, 3, 2, 2, 1), \\ \Lambda^{(3)} &= (9, 6, 4, 3, 3, 2, 2, 1), & \Lambda^{(6)} &= (9, 6, 3, 3, 3, 3, 2, 1), \\ \Lambda^{(7)} &= (9, 6, 3, 3, 3, 2, 2, 2), & \Lambda^{(8)} &= (9, 6, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1). \end{aligned}$$

Все численные данные собраны в таблицу, где  $\varepsilon := q^{-1}$ .

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda_k$		9	6	3	3	3	2	2	1	0	0
$r_k$	29	21	14	9	7	5	3	2	1	0	0
$\lambda_k^*$		8	7	5	2	2	2	1	1	1	0
$\alpha_k$		1	2	3	0	0	1	0	0	1	0
$w_k$	$-\infty$	21	22	24	27	27	27	28	28	28	29
$p_k$	0	$\varepsilon^8$	$\varepsilon^7 - \varepsilon^8$	$\varepsilon^5 - \varepsilon^7$	$\varepsilon^2 - \varepsilon^5$	0	0	$\varepsilon - \varepsilon^2$	0	0	$1 - \varepsilon$

**3.5. Граф Юнга  $Y$  и многочлены  $P_\lambda(q)$ .** Пусть  $Y$  - это граф, вершины которого - это разбиения  $\lambda$  (или их диаграммы Юнга  $D(\lambda)$ ), а стрелки  $\lambda \rightarrow \Lambda$  соответствуют соседним разбиениям. Для каждой матрицы  $A \in \mathfrak{g}_n$  обозначим  $A|_k$  матрица, полученная из  $k$  первых столбцов  $A$ . Последовательность  $\{J(A|_k)\}$ ,  $0 \leq k \leq n$ , определяет путь в  $Y$  который начинается с пустой диаграммы в начальный момент (0) и заканчивается в  $D(\lambda)$  в момент  $n$ . Чтобы определить этот путь, необходимо заполнить клетки диаграммы  $D(\lambda)$  числами  $1, 2, \dots, n$ , таким образом, что клетки с числами  $\leq k$  образуют диаграмму  $J(A|_k)$ . Итоговая таблица называется **стандартная таблица** и обозначается как  $T(A)$ .

Известно, что "унепреды" (унитарное неприводимое представление) группы  $S_n$  естественным образом индексируются разбиениями  $\lambda \in \mathcal{P}_n$ . Более того, размерность  $d_\lambda$  унепреда  $\pi_\lambda$  равна числу стандартных таблиц формы  $\lambda$ .

Обозначим через  $P_T(q)$  число матриц  $A \in \mathfrak{g}_n(\mathbb{F}_q)$  с  $T(A) = T$ . Ясно что,

$$(13) \quad \#\mathfrak{g}_\lambda = \sum_{T \mapsto \lambda} P_T(q), \quad \text{где } T \mapsto \lambda \text{ означает то, что } T \text{ вида } \lambda.$$

С другой стороны, мы имеем рекуррентные соотношения для  $P_T$ :

**Предложение 2.** Если  $\lambda \xrightarrow{t,s} \Lambda$ ,  $T_n \mapsto \lambda$  и  $T_{n+1} \mapsto \Lambda$ , тогда

$$(14) \quad P_{T_{n+1}}(q) = q^n (q^{-\lambda_s^*} - q^{-\lambda_{s-1}^*}) P_{T_n}(q).$$

В разделе 2.2. мы представили обозначение  $\mathfrak{g}_\lambda$  для подмножества  $\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)$ , состоящего из матриц Жорданового типа  $\lambda$  и обозначили за  $P_\lambda(q)$  число точек в  $\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)$ . Предложение выше обозначает что  $P_\lambda(q)$  - многочлен в  $q$  и позволяет рекурсивно его посчитать. Чтобы записать результат, нужны ещё обозначения.

В комбинаторике величина  $\frac{q^k - 1}{q - 1}$  обозначается как  $[k]_q$  и считается " $q$ -аналогом" натурального числа  $k$ . Подобным образом, можно определить  $q$ -аналоги для факториалов и биномиальных коэффициентов. Удобно также иметь специальное обозначение  $Q$  для числа  $q - 1 = |\mathbb{F}_q^\times|$ .

Легко убедиться, что в этих обозначениях хотя бы какие-то из многочленов  $P_\lambda$  будут простыми. А именно,

$$P_{1^k} = 1, \quad P_{k+1} = q^{\binom{k}{2}} Q^k, \quad P_{21^{k-1}} = kq^k - [k]_q, \\ P_{k1} = q^{\binom{k}{2}-1} Q^{k-1} (kq + 1), \dots$$

**Упражнение 2** (Дополнительное). Найдите явную формулу для  $P_{k1^m}$  (крюковые диаграммы).

**Упражнение 3** (Дополнительное). То же для  $P_{2^k 1^m}$  (двухстолбцовые диаграммы).

**Упражнение 4** (Дополнительное). Найдите закономерность в очень примечальном семействе многочленов  $A_n = \sum_{2k+m=n} P_{2^k 1^m}$  (см. таблицу ниже).

$$\begin{aligned}A_0 &= 1, \\A_1 &= 1, \\A_2 &= q, \\A_3 &= 2q^2 - q, \\A_4 &= 2q^4 - q^2, \\A_5 &= 5q^6 - 4q^5, \\A_6 &= 5q^9 - 5q^7 + q^5, \\A_7 &= 14q^{12} - 14q^{11} + q^7, \\A_8 &= 14q^{16} - 20q^{14} + 7q^{12}, \\A_9 &= 42q^{20} - 48q^{19} + 8q^{15} - q^{12}, \\A_{10} &= 42q^{25} - 75q^{23} + 35q^{21} - q^{15}, \\A_{11} &= 132q^{30} - 165q^{29} + 44q^{25} - 10q^{22}, \\A_{12} &= 132q^{36} - 275q^{34} + 154q^{32} - 11q^{26} + q^{22}, \\A_{13} &= 429q^{42} - 572q^{41} + 208q^{37} - 65q^{34} + q^{26}, \\A_{14} &= 429q^{49} - 1001q^{47} + 637q^{45} - 77q^{39} + 13q^{35}, \\A_{15} &= 1430q^{56} - 2002q^{55} + 910q^{51} - 350q^{48} + 14q^{40} - q^{35}, \\A_{16} &= 1430q^{64} - 3640q^{62} + 2548q^{60} - 440q^{54} + 104q^{50} - q^{40}, \\P_{17} &= 4862q^{72} - 7072q^{69} + 3808q^{67} - 1700q^{64} + 119q^{56} - 16q^{51}.\end{aligned}$$



#### 4. Подход со стороны статистической механики

4.1. **Введение.** Множество  $\Phi := \mathfrak{g}_n(\mathbb{F}_q) \times \mathfrak{g}_n(\mathbb{F}_q) \times \mathfrak{g}_n^*(\mathbb{F}_q)$  может быть рассмотрено как фазовое пространство некоторой статистической механической системы. Естественным кандидатом в функции разбиения будет выражение

$$(15) \quad \Sigma_n(q) = \sum_{X, Y \in \mathfrak{g}_n, F \in \mathfrak{g}_n^*} \chi(\langle F, [X, Y] \rangle).$$

Здесь  $\chi$  это любой нетривиальный аддитивный характер<sup>4</sup> поля  $\mathbb{F}_q$ . Чтобы посчитать это выражение, используем тождество

$$\sum_{f \in V^*} \chi(\langle f, v \rangle) = q^N \delta(v) \quad \text{for any } f \in V^*,$$

где  $V$  - это  $N$ -мерное векторное пространство над  $\mathbb{F}_q$ ,  $V^*$  - двойственное векторное пространство и  $\delta(v) = \begin{cases} 1 & \text{if } v = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$

Применяя тождество к случаю  $V = \mathfrak{g}$ ,  $v = [X, Y]$ ,  $N = \binom{n}{2}$ , получаем

$$(16) \quad \Sigma_n(q) = q^{\binom{n}{2}} \sum_{X, Y \in \mathfrak{g}} \delta([X, Y]) = |G| \cdot |CP(\mathfrak{g})|,$$

где  $CP(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$  обозначает множество пар коммутирующих элементов в алгебре Ли  $\mathfrak{g}$ .

С другой стороны, переписывая  $\langle F, [X, Y] \rangle$  в виде  $\langle [Y, F], X \rangle$ , получаем

$$\Sigma_n(q) = q^{\binom{n}{2}} \sum_{Y \in \mathfrak{g}, F \in \mathfrak{g}^*} \delta(K(Y)F) = \#G \cdot \sum_{F \in \mathfrak{g}^*} |stab_{\mathfrak{g}}(F)|.$$

Последнюю сумму над  $F \in \mathfrak{g}^*$  мы разделим на суммы над  $F \in \Omega$  для данной коприсоединённой орбиты  $\Omega$  и суммы над всеми коприсоединёнными орбитами  $\Omega \in \mathfrak{g}^*/G$ . Поскольку

$$|\Omega_F| = \frac{|G|}{|Stab_G(F)|} = \frac{|\mathfrak{g}|}{|stab_{\mathfrak{g}}(F)|},$$

наконец, получим

$$(17) \quad \Sigma_n(q) = q^{n(n-1)} |\mathfrak{g}^*/G| = q^{n(n-1)} |\widehat{G}|.$$

Это приводит к полезному соотношению (которое может быть получено многими другими способами):

$$(18) \quad |CP(G)| = |G| \cdot |\widehat{G}|.$$

<sup>4</sup>Сумма в вопросе не зависит от выбора  $\chi$ .

**4.2. Дополнительный параметр: степень расширения.** Пусть  $\mathfrak{g}_{n,m}^*$  обозначает объединение всех  $2m$ -мерных орбит в  $\mathfrak{g}^*$ . Напомним, что основное знание о структуре  $\widehat{G}$  в смысле коприсоединённых орбит лежит в семействе многочленов  $P_n(q, t) = \sum_{m \geq 0} t^m \cdot |\mathfrak{g}_{n,m}^*(\mathbb{F}_q)|$ .

Интересно что эти многочлены могут быть выражены как функции разбиения, схожим образом с  $\Sigma_n$  выше. Но мы вернёмся к этому в следующей главе.

*E-mail address: kirillov@math.upenn.edu*