

Дополнительные главы алгебры. Домашнее задание к 20 февраля.

Задачи сдаются в письменном виде 20 февраля в 14:00 (перед контрольной). На полный балл достаточно решить любые 6 пунктов задач. Номер варианта зависит от первой буквы вашей фамилии: 1-й: А-Д; 2-й: Е-К; 3-й: Л-П; 4-й: Р-Я.

Вариант 1.

Задача 1. Разложите в произведение неприводимых в $\mathbb{Q}[x, y]$: $x^2y^4 + 2x^3y^2 + x^4 + x^2y^2 + 2x^3 + x^2 + 2xy - 1$.

Задача 2. Пусть $P(x, y) = 4x^2 - y^2 - 2y - 2$; $Q(x, y) = 4x^2 + y^2 + 2y + 4x - 2$.

(а) Найдите пересечение кривых $P(x, y) = 0$ и $Q(x, y) = 0$.

(б) Разложите $\mathbb{C}[x, y]$ -модуль $\mathbb{C}[x, y]/(P(x, y), Q(x, y))$ в прямую сумму неразложимых.

Задача 3. Найдите нормальную форму $\mathbb{Z}[i]$ -модуля с образующими x, y и соотношениями $(2 + i)x + (10 - 5i)y = 0$, $(3 + 2i)x + 15y = 0$.

Задача 4. Найдите количество автоморфизмов абелевой группы $\mathbb{Z}/120\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

Задача 5. (а) Комплексные матрицы A и B коммутируют, причем минимальный многочлен A равен $x^2 + 4$, а минимальный многочлен B равен $(x - 1)^3$. Найдите минимальный возможный размер таких матриц (т.е. приведите пример и докажите, что меньшего размера не бывает).

(б) Тот же вопрос для вещественных матриц.

Вариант 2.

Задача 1. Разложите в произведение неприводимых в $\mathbb{Q}[x, y]$: $x^2y^4 + 2x^3y^2 + x^4 + x^2y^2 + 2x^3 - 2xy^2 - x^2 - 2x + 1$.

Задача 2. Пусть $P(x, y) = 4x^2 - y^2 + 2y - 2$; $Q(x, y) = 4x^2 + y^2 - 2y - 4x - 2$.

(а) Найдите пересечение кривых $P(x, y) = 0$ и $Q(x, y) = 0$.

(б) Разложите $\mathbb{C}[x, y]$ -модуль $\mathbb{C}[x, y]/(P(x, y), Q(x, y))$ в прямую сумму неразложимых.

Задача 3. Найдите нормальную форму $\mathbb{Z}[i]$ -модуля с образующими x, y и соотношениями $(2 - i)x + (3 - 2i)y = 0$, $10x + (15 + 5i)y = 0$.

Задача 4. Найдите количество автоморфизмов абелевой группы $\mathbb{Z}/40\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/45\mathbb{Z}$.

Задача 5. (а) Комплексные матрицы A и B коммутируют, причем минимальный многочлен A равен $x^2 + 4$, а минимальный многочлен B равен $(x^2 + 1)^3$. Найдите минимальный возможный размер таких матриц (т.е. приведите пример и докажите, что меньшего размера не бывает).

(б) Тот же вопрос для вещественных матриц.

Вариант 3.

Задача 1. Разложите в произведение неприводимых в $\mathbb{Q}[x, y]$: $x^2y^6 + 2x^3y^3 + x^4 + x^2y^4 + 2x^3y + x^2y^2 + 2xy^3 - y^2$.

Задача 2. Пусть $P(x, y) = 9x^2 - y^2 - 2y - 2$; $Q(x, y) = 9x^2 + y^2 + 2y + 6x - 2$.

(а) Найдите пересечение кривых $P(x, y) = 0$ и $Q(x, y) = 0$.

(б) Разложите $\mathbb{C}[x, y]$ -модуль $\mathbb{C}[x, y]/(P(x, y), Q(x, y))$ в прямую сумму неразложимых.

Задача 3. Найдите нормальную форму $\mathbb{Z}[i]$ -модуля с образующими x, y и соотношениями $(3 + i)x + (3 - 2i)y = 0$, $(10 + 10i)x + 15y = 0$.

Задача 4. Найдите количество автоморфизмов абелевой группы $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/135\mathbb{Z}$.

Задача 5. (а) Комплексные матрицы A и B коммутируют, причем минимальный многочлен A равен $(x^2 + 4)(x^2 - 4)$, а минимальный многочлен B равен $(x - 1)^3$. Найдите минимальный возможный размер таких матриц (т.е. приведите пример и докажите, что меньшего размера не бывает).

(б) Тот же вопрос для вещественных матриц.

Вариант 4.

Задача 1. Разложите в произведение неприводимых в $\mathbb{Q}[x, y]$: $x^2y^6 + 2x^3y^3 + x^4 + x^2y^4 + 2x^3y - 2xy^4 - x^2y^2 - 2xy^2 + y^2$.

Задача 2. Пусть $P(x, y) = 9x^2 - y^2 + 2y - 2$; $Q(x, y) = 9x^2 + y^2 - 2y + 6x - 2$.

(а) Найдите пересечение кривых $P(x, y) = 0$ и $Q(x, y) = 0$.

(б) Разложите $\mathbb{C}[x, y]$ -модуль $\mathbb{C}[x, y]/(P(x, y), Q(x, y))$ в прямую сумму неразложимых.

Задача 3. Найдите нормальную форму $\mathbb{Z}[i]$ -модуля с образующими x, y и соотношениями $(2 - i)x + (3 - 2i)y = 0$, $(10 + 5i)x + 25y = 0$.

Задача 4. Найдите количество автоморфизмов абелевой группы $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

Задача 5. (а) Комплексные матрицы A и B коммутируют, причем минимальный многочлен A равен $(x^2 + 4)^2$, а минимальный многочлен B равен $(x - 1)^2$. Найдите минимальный возможный размер таких матриц (т.е. приведите пример и докажите, что меньшего размера не бывает).

(б) Тот же вопрос для вещественных матриц.