

Дополнительные главы алгебры. Задачи к семинару 5.

Задача 1. Приведите пример несвободного конечнопорожденного $\mathbb{C}[x, y]$ -модуля без кручения.

Задача 2. Конечнопорожденная абелева группа A такова, что $\text{Hom}(A, \mathbb{Z}) = 0$. (а) Найдите $\text{Hom}(A, \mathbb{Q})$.
(б) Найдите $\text{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Задача 3. Найдите минимальное возможное количество образующих абелевой группы $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$.

Задача 4. (а) Объясните, как по паре многочленов $P(x), Q(x) \in \mathbb{C}[x]$ понять, существует ли линейный оператор с характеристическим многочленом $P(x)$ и минимальным многочленом $Q(x)$.

(б) Объясните как описать все возможные жордановы формы таких матриц.

Задача 5. Выразите минимальный многочлен матрицы A через миноры матрицы $xE - A$.

Задача 6. (а) Опишите кольцо эндоморфизмов \mathbb{Z} -модуля $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(б) Тот же вопрос для \mathbb{Z} -модуля $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

(в) Те же вопросы для $\mathbb{C}[x]$ -модулей $\mathbb{C}[x]/(P(x))$ и $\mathbb{C}[x]/(P(x)) \oplus \mathbb{C}[x]/(Q(x))$.