Лекция 6-19. Преобразование Фурье

Здесь мы продолжим доказательство формул Планшереля и обращения для преобразования Фурье.

1 Ряды Фурье на “длинной” окружности

Окружность изображается отрезком с отождествленными концами. Другое представление: функции на окружности “длины T” изображаются T-периодическими функциями на прямой. Этим представлением мы и воспользуемся.

Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \in L_2(\mathbb{R})$ с периодом $2\pi l$, и найдем ее разложение в ряд Фурье по базису, который будет сейчас построен. Функция $g(x) = f(xl)$ имеет период 2π и разлагается в классический ряд Фурье

$$g(x) = \Sigma_{k\in\mathbb{Z}} g_k e^{ikx}. \tag{1}$$

Множители перед ix в показателе экспоненты называются волновыми числами. В обычном ряде Фурье множество волновых чисел совпадает с $\mathbb{Z}$. Сходимость рядов в этой и следующей формуле - в пространствах $L_2[-\pi,\pi]$ и $L_2[-\pi l,\pi l]$ соответственно.

По определению функции g, при $|x| \leq \pi l$,

$$f(x) = g\left(\frac{x}{l}\right) = \Sigma g_k e^{ik\frac{x}{l}} = \Sigma_{\alpha\in\frac{\mathbb{Z}}{l}} c_\alpha e^{i\alpha x}. \tag{2}$$

Волновые числа в последнем ряде пробегают множество $\frac{\mathbb{Z}}{l}$. При большом l это множество гораздо гуще, чем $\mathbb{Z}$. Допуская вольность речи, можно сказать, что при $l \to \infty$ оно стремится к $\mathbb{R}$.

Формула (2) показывает, что векторы $e^{i\alpha x}$, $\alpha \in \frac{\mathbb{Z}}{l}$, образуют базис в $L_2([-\pi l, \pi l])$. Их нормы равны $\sqrt{2\pi l}$. Следовательно, при $\alpha \in \frac{\mathbb{Z}}{l}$,

$$c_\alpha = \frac{1}{2\pi l}\int_{-\pi l}^{\pi l} f(x)e^{-i\alpha x}dx$$

Отметим, что если функция f финитна и ее носитель принадлежит отрезку $[-\pi l, \pi l]$, то при $\alpha \in \frac{\mathbb{Z}}{l}$,

$$c_\alpha = \frac{1}{2\pi l}\tilde{f}(\alpha) \tag{3}$$

Равенство Планшереля для f имеет вид

$$||f||^2 = 2\pi l\ \Sigma_{\alpha\in\frac{\mathbb{Z}}{l}}|c_\alpha|^2. \tag{4}$$

Разложение f в ряд Фурье дается формулами (2), (3).

2 Предельный переход: эвристическое доказательство равенства順Планшереля и формулы обращения

Фиксируем финитную функцию $f \in C^{2,0}$ с носителем $\operatorname{supp} f \subset [-\pi l_0, \pi l_0]$, и для каждого $l > l_0$ рассмотрим ограничение функции f на отрезок $[-\pi l, \pi l]$. Эти ограничения формально – разные функции, но мы будем все их обозначить через f. Как доказано в лекции 3, ряд Фурье функции f сходится к ней поточечно.

Докажем равенство Планшереля:

$$||f|| = ||\hat{f}||.$$

Для этого достаточно доказать:

$$||f||^2 = \frac{1}{2\pi}||\tilde{f}||^2 \tag{5}$$

В силу (4) и (3),

$$||f||^2 = \frac{1}{2\pi l}\Sigma_{\alpha\in\frac{\mathbb{Z}}{l}}|\tilde{f}(\alpha)|^2 := \Sigma_l. \tag{6}$$

Выражение Σ_l – это "бесконечная интегральная сумма" для интеграла

$$\frac{1}{2\pi}||\tilde{f}||^2 = \frac{1}{2\pi}\int |\tilde{f}(\alpha)|^2 d\alpha := I$$

Сумма соответствует разбиению прямой на отрезки длины $\frac{1}{l}$ с вершинами в точках множества $\frac{\mathbb{Z}}{l}$. С одной стороны, эта сумма стремится к интегралу (это еще надо доказать!), с другой последовательность Σ_l стационарна (не зависит от l). Это "доказывает" (5).

Аналогично доказывается формула обращения. Напомним, что для финитной дважды гладкой функции f сходимость в формуле (2) - поточечная. Поэтому для любого $l \geq l_0$ и x такого, что $|x| \leq \pi l$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi l}\Sigma_{\alpha\in\frac{\mathbb{Z}}{l}}\tilde{f}(\alpha)e^{i\alpha x} := S_l(x).$$

Выражение $S_l(x)$ – "бесконечная интегральная сумма" для интеграла

$$I(x) = \frac{1}{2\pi}\int \tilde{f}(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha.$$

Переходя к пределу, как и выше (этот переход тоже нужно обосновать), получаем формулу обращения

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha \tag{7}$$

3 Формальное доказательство

Лемма 1 *Если* $f \in C^{2,0}$, *то* $\Sigma_l \xrightarrow[l\to\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\tilde f(\alpha)|^2 d\alpha$.

Лемма 2 *Если* $f \in C^{2,0}$, *то* $\forall x \in \mathbb{R}, S_l(x) \to I(x) = \frac{1}{2\pi}\int \tilde f(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$ *при* $l \to \infty$.

Из предыдущих рассуждений и леммы 1 следует теорема Планшереля, а из леммы 2 – формула обращения для финитных дважды гладких функций.
Доказательство [Леммы 1]. Если бы интеграл I был собственным, стремление интегральной суммы к интегралу было бы следствием теории интеграла Римана. Нам нужно “справиться” с несобственным интегралом. Это делается с помощью мажорирования.

В силу следствия 1 прошлой лекции, существует $C > 0 : |\tilde f(\alpha)| < C(1+\alpha^2)^{-1}$. Для любого N:

$$\frac{1}{l}\Sigma_{\alpha\in\frac{\mathbb{Z}}{l}\setminus[-N,N]}|\tilde f(\alpha)|^2 < \frac{1}{l}\Sigma_{\alpha\in\frac{\mathbb{Z}}{l}\setminus[-N,N]}\frac{C}{(1+\alpha^2)^2} < C\int_{|\alpha|\ge N-\frac{1}{l}}\frac{d\alpha}{(1+\alpha^2)^2}.$$

Последний интеграл сходится. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что

$$\left|\int_{|\alpha|\ge N}|f(\alpha)|^2 d\alpha\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Поскольку функция f финитна, ее преобразование Фурье непрерывно. По теореме об интегрируемости по Риману непрерывной функции, существует l столь большое, что

$$\left|\frac{1}{l}\Sigma_{\alpha\in\frac{\mathbb{Z}}{l},\ |\alpha|\le N}|\tilde f(\alpha)|^2 - \int_{|\alpha|\le N}|\tilde f(a)|^2 dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда $\left|\Sigma_l - ||\tilde f||^2\right| < \varepsilon$. □

Аналогично доказывается лемма 2. Ее подробное доказательство войдет в теоретическую контрольную как вопрос со *.

Вывод. Доказаны теоремы 3 и 4 прошлой лекции: равенство Планшереля и формула обращения для финитных дважды гладких функций f.

Цель: доказать то же для всех $f \in L_2$.

4 Операторы и их продолжение

Определение 1 $A : H \to H$ *– линейный оператор, если* $A(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha A(\xi) + \beta A(\eta)$.

Определение 2 A *– изометрия, если* $||A\xi|| = ||\xi||\ \forall \xi \in H$; A *– линейный по умолчанию.*

Теорема 1 *Пусть H – гильбертово пространство, E – плотное множество в H, $A : E \to E' \subset H$ – изометрия. Тогда A продолжается на H до изометрии $\mathcal{A} : H \to H$.*

Доказательство [triv]. Пусть $x \in H,\ (x_r) \subset E,\ x_n \to x$ при $n \to \infty$. Пусть $y_n = Ax_n$. Тогда (x_n) – фундаментальная последовательность $\Rightarrow (y_n)$ – тоже фундаментальная последовательность. Пусть $y = \lim_{n\to\infty y_n}$. Положим $\mathcal{A}(x) = y$.

Упражнение 1 *$\mathcal{A}$ корректно определено: y зависит только от x, а не от $x_n \to x$.*

$\mathcal{A}$ – изометрия, поскольку $||y_n|| = ||x_n|| \Rightarrow ||y|| = ||x||$. □

Тем самым, нормированное преобразование Фурье продолжается на все пространство $L_2(\mathbb{R})$ как изометрия. Если обозначить через $\hat{f}$ образ функции f под действием продолженного с дважды гладких финитных функций нормированного преобразования Фурье, то на всем пространстве $L_2(\mathbb{R})$ справедлива формула Планшереля.

Формула обращения распространяется на все пространство $L_2(\mathbb{R})$ аналогично. А именно, пусть $S : f(x) \mapsto f(-x)$ -оператор обращения аргумента. Формула обращения эквивалентна следующей:

$$\mathcal{F}^2 = 2\pi S.$$

Операторы в правой и левой части этого равенства - изометрии, с точностью до множителя 2π. Их совпадение на плотном множестве $C^{2,0}$ влечет их совпадение на всем пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

5 Какой формулой задается продолженное преобразование Фурье?

Желаемый ответ: формулой

$$\tilde{f}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\alpha x} dx, \tag{8}$$

Однако этот ответ - неокончательный: формулу (8) можно понимать по-разному. По умолчанию, в правой части этой формулы стоит интеграл Лебега от суммируемой функции. При такой интерпретации преобразование Фурье (оператор $\mathcal{F}$) определено только на пространстве $L_1(\mathbb{R})$. Мы продолжили оператор $\mathcal{F}$ на все пространство $L_2(\mathbb{R})$.

Теорема 2 *Продолжение оператора $\mathcal{F}$ на все пространство $L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$ задается той же формулой* (8).

Доказательство В лекции 1 доказано, что непрерывные функции плотны в пространствах $L_1(\mathbb{R})$ и $L_2(\mathbb{R})$. Слегка модифицируя это доказательство, можно доказать, что любую функцию f из этого пространства можно приблизить последовательностью финитных дважды гладких функций f_n, которая будет сходиться к ней и в метрике $L_1(\mathbb{R})$ и в метрике $L_2(\mathbb{R})$. Из сходимости $f_n \to f$ в метрике $L_1(\mathbb{R})$ следует, что всюду на $\mathbb{R}$

$$\tilde{f}_n(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x) e^{-i\alpha x} dx \to \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\alpha x} dx = \tilde{f}(\alpha).$$

Эта сходимость равномерная, как показывает оценка

$$|\int_{\mathbb{R}} (f_n(x) e^{-i\alpha x} - f(x) e^{-i\alpha x}) dx| \leq ||f - f_n||_{L_1} \to 0.$$

Из сходимости $f_n \to f$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$ следует, что

$$\mathcal{F} f_n \to \mathcal{F} f$$

в метрике $L_2(\mathbb{R})$. Но если последовательность функций из $L_2(\mathbb{R})$ сходится $\mathcal{F} f$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$, а также сходится равномерно к какой-то функции, то эта функция и есть $\mathcal{F} f$. Следовательно, $\mathcal{F} f$ почти всюду на $\mathbb{R}$ задается формулой (8). $\square$

Если понимать правую часть, как интеграл Лебега от суммируемой функции, то на пространстве $L_2(\mathbb{R}) \setminus L_1(\mathbb{R})$ преобразование Фурье не существует. Но оператор $\mathcal{F}$ на это пространство продолжен! Он по-прежнему задается формулой (8), если ее интерпретировать по-иному.

Теорема 3 *Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$. Тогда $\mathcal{F} f$ почти всюду задается формулой* (8), *если интеграл в правой части понимать как несобственный, точнее как предел $\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\alpha x} dx = \lim \int_{-n_k}^{n_k} f(x) e^{-i\alpha x} dx$.*

Теорема немедленно следует из предложения:

Предложение 1 *Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$. Тогда существует последовательность $n_k \to \infty$ такая, что $\mathcal{F} f \chi([-n_k, n_k])$ сходится к $\mathcal{F} f$ почти всюду.*

Доказательство [предложения]. Из сходимости последовательности функций в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ следует ее сходимость по мере. Из сходимости по мере следует сходимость подпоследовательности почти всюду. Близкое утверждение, в котором область определения - не прямая, а отрезок, – это задача 1 b листка 2.2. Мы ограничимся здесь этой ссылкой. $\square$