Лекция 4.
Коприсоединённые орбиты треугольной группы G_n

А.А.КИРИЛЛОВ

Напомним, что $G_n(K)$ - это группа из K - точек алгебраической группы G_n верхнетреугольных $n \times n$ матриц, $\mathfrak{g}_n(K)$ - её алгебра Ли и $\mathfrak{g}^*(K)$ - двойственное K-векторное пространство. Мы будем опускать K если ясно о каком поле идёт речь, или это не имеет значения.

Когда $K = \mathbb{R}$ или Γ, G_n является связной или односвязной нильпотентной групой Ли. Для таких групп метод орбит позволяет построить биекцию между множеством $\widehat{G}_n$ классов эквивалентности унепредов группы G_n и множеством $\mathcal{O}_n^* = \mathfrak{g}_n^*/G_n$ коприсоединённых орбит (т.е.. G_n-орбит в $\mathfrak{g}_n^*$).[1]

К сожалению, структура множеств $\mathcal{O}_n^*$ коприсоединённых орбит треугольных групп гораздо более сложная, чем у классических групп.

Здесь, как и в случае присоединённых орбит, результат практически не зависит от базового поля K. Поэтому, сначала попытаемся понять структуру $\mathcal{O}_n^*(K)$ для случая конечных полей $K = \mathbb{F}_q$.

1. Основные факты и определения

Для начала напомним, что для свзяной и односвязной нильпотентной группы Ли G экспоненциальное отображение $\exp : \mathfrak{g} \to G$ - это диффеоморфизм, т.е. гладкая биекция. Для алгебраических групп над конечными полями стандартная формула для exp не имеет смысла. Но для $K = \mathbb{F}_q$, $q = p^k$, мы может заменить его “фальшивой” экспонентой

$$\exp_p(X) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{X^k}{k!}, \tag{1}$$

или, даже более простым отображением $\exp_2(X) = 1 + X$. Ясно, что эти отображения задают биекцию из $\mathfrak{g}_n(K)$ в $G_n(K)$ и перестановочны с действием $G_n(K)$:

$$\exp_p(\mathrm{Ad}h\, X) = h \exp_p(X) h^{-1} \quad \text{for} \quad h \in G_n(K),\ X \in \mathfrak{g}_n(K). \tag{2}$$

Они также переводят подалгебры $\mathfrak{g}_n(K)$ в подгруппы $G_n(K)$.

Date: Spring 2019.

[1]Об этом и других фактах, связанных с методом орбит см. [?K0], [?K1] и [?K4].

Для любой $g \in G_n(K)$ оператор коприсоединённого действия g на $\mathfrak{g}_n^*(K)$ - это $(\mathrm{Ad}\, g^{-1})^*$. Для краткости, обозначим его как $K(g)$. Тогда

$$\langle K(g)F,\, X\rangle = \langle F,\, \mathrm{Ad}\, g^{-1}X\rangle. \tag{3}$$

Соответствующее действие алгебры Ли $\mathfrak{g}_n$ имеет вид:

$$\langle K_*(X)F,\, Y\rangle = -\langle F,\, [X,\, Y]\rangle. \tag{4}$$

Теперь мы сформулируем одно простое, но очень важное свойство коприсоединённых орбит.

Теорема 1. *a) Размерность орбиты $\Omega \subset \mathfrak{g}_n^*(K)$, проходящей через точку $F \in \mathfrak{g}_n(K)$, равна рангу билинейной формы B_F на $g_n(K)$, заданной формулой $B_F(X,\, Y) = \langle F,\, [X,\, Y]\rangle$.*

b) На всякой коприсоединённой орбите $\Omega \subset \mathfrak{g}_n^*(K)$ существует канонически определённая дифференциальная 2-форма σ_Ω. Именно, пусть $X,\, Y \in \mathfrak{g}_n,\; F \in \Omega$; определим векторы $\xi,\, \eta \in T_F\Omega$ как $\xi = K_*(X)F,\; \eta = K_*(Y)F$. Тогда

$$\sigma_\Omega(F)(\xi,\, \eta) = B_F(X,\, Y). \tag{5}$$

c) Форма σ_Ω замкнута, невырождена и $G_n(K)$-инвариантна.

Доказательство. a) Пусть $Stab(F)$ - стабилизатор F в $G_n(k)$. Прямое вычисление (см. (4)) показывает что его алгебра Ли $stab(F)$ совпадает с ядром B_F. Поэтому, $\dim \Omega_F = \dim T_F\Omega_F = \dim \mathfrak{g} - \dim \ker B_F = \mathrm{rk}\, B_F$.

Доказательство b) и c) требует владения некоторой (элементарной) техникой из дифференециальной геометрии однородных многообразий. Читатель может обратиться к книгам [?6, ?8] (см. также указания внизу)

Заметим что структура коприсоединённых орбит как однородных алгебраических многообразий очень проста. Это - гладкие алгебраические подмногообразия в $\mathfrak{g}_n^*$, изоморфные чётномерным аффинным пространствам $\mathbb{A}^{2m}$. Элемент $g \in G_n(K)$ действиет на $\mathfrak{g}^*(K)$ линейными преобразованиями $K(g)$ и матричные элементы этого преобразования - это многочлены на $G_n(K)$ (см. примеры ниже).

Поскольку форма B_F антисимметрична, её ранг - чётное число. Таким образом, пространство $\mathfrak{g}^*(K)$ распадается на части $\mathfrak{g}_{n,m}(K)$, где этот ранг равен $2m$. Каждая часть $\mathfrak{g}_{n,m}(K)$, в свою очередь, распадается на коприсоединённые орбиты размерности $2m$. Обозначим множество всех коприсоединённых орбит размерности $2m$ через $\mathcal{O}_{n,m}(K)$. Мы рассмотрим их более подробно ниже (см. секцию 3).

1.1. **Примеры.** Перед тем как пойти дальше, полезным будет подробно рассмотреть два маломерных примера.

Пример 1. Алгебра Ли $\mathfrak{g}_3$ состоит из матриц $X = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Элементы $\mathfrak{g}_3^*$ мы будем записывать в виде $F = \begin{pmatrix} * & * & * \\ x & * & * \\ z & y & * \end{pmatrix}$ (догадайтесь, почему?).

Для $X = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $X' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha' & \gamma' \\ 0 & 0 & \beta' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ мы имеем $[X, X'] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\beta' - \alpha'\beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $B_F(X, X') := \langle F, [X, X'] \rangle = z(\alpha\beta' - \alpha'\beta)$.

Матрица формы B_F на $\mathfrak{g}_3$ в естественном базисе - это $\begin{pmatrix} 0 & z & 0 \\ -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Таким образом, подмножество $\mathfrak{g}_{3,0}^* \subset \mathfrak{g}_3^*$ определено условием $z = 0$. Оно имеет размерность 2 и распадается на нульмерные орбиты - точки вида $(x, y, 0)$.

Множество $\mathfrak{g}_{3,1}^*$ определяется неравенством $z \neq 0$, имеет размерность 3 и распадается на двумерные орбиты - плоскости $z = const$.

Окончательно, получаем: $\mathcal{O}_{3,0}^* \simeq \mathbb{A}_{x,y}^2$, $\mathcal{O}_{3,1}^* \simeq \mathbb{A}_z^1 \backslash \mathbb{A}^0 \simeq GL_1$.

Пример 2. Пространство $\mathfrak{g}_4^*$ состоит состоит из матриц
$F = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ x_1 & * & * & * \\ y_1 & x_2 & * & * \\ z & y_2 & x_3 & * \end{pmatrix}$.

Для $X = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1' & \beta_1' & \gamma' \\ 0 & 0 & \alpha_2' & \beta_2' \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ имеем
$[X, X'] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_1\alpha_2' - \alpha_1'\alpha_2 & \alpha_1\beta_2' + \beta_1\alpha_3' - \alpha_1'\beta_2 - \beta_1'\alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2\alpha_3' - \alpha_3'\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Таким образом, $B_F(X, X')$ имеет вид $y_1(\alpha_1\alpha_2' - \alpha_1'\alpha_2) + y_2(\alpha_2\alpha_3' - \alpha_3'\alpha_2) + z(\alpha_1\beta_2' + \beta_1\alpha_3' - \alpha_1'\beta_2 - \beta_1'\alpha_3)$.

Матрица $B_F = \begin{pmatrix} 0 & y_1 & 0 & 0 & z & 0 \\ -y_1 & 0 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z & 0 & 0 & 0 \\ -z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Подмножество $\mathfrak{g}^*_{4,0}$ задано условиями $z = y_1 = y_2 = 0$. Оно имеет размерность 3 и распадается на нульмерные орбиты, определяемые значениями x_1, x_2, x_3.

Множество $\mathfrak{g}^*_{4,1}$ задаётся условиями $z = 0,\ (y_1, y_2) \neq (0, 0)$. Оно имеет размерность 5 и распадается на двумерные орбиты, определяемые значениями y_1, y_2 и величиной $z' = x_1y_2 + x_3y_2$.[2]

Множество $\mathfrak{g}^*_{4,2}$ определяется неравенством $z \neq 0$, имеет размерность 6 и распадается на четырёхмерные орбиты, определяемые значениями двух инвариантов: z и $\Delta := zx_2 - y_1y_2$.

Окончательно, получаем: $\mathcal{O}^*_{4,0} \simeq \mathbb{A}^3_{x_1,x_2,x_3},\ \mathcal{O}^*_{4,1} \simeq \mathbb{A}^3_{y_1,y_2,z'} \backslash \mathbb{A}^1_{z'},\ \mathcal{O}^*_{4,2} \simeq \mathbb{A}^2_{z,\Delta} \backslash \mathbb{A}^1_z$.

2. Симплектические и Пуассоновы многобразия

2.1. **Симплектические многообразия.** Понятие **симплектического многообразияя** (M, σ) - это, в каком-то смысле, нечётный аналог Риманова многобразия (M, g). Вместо **метрики** g, которая задаётся положительно определённой симметрической билинейной формой $g_{i,j}dx^i dx^j$ в каждом касательном пространстве T_xM, мы будем рассматривать **симплектическую структуру** σ, определённую невырожденной антисимметрической билинейной формой[3] $\sigma_{i,j}dx^i \wedge dx^j$.

Точнее, мы рассматриваем нечётный аналог **плоской метрики** на M. Дело в том, что коэффициенты $g_{i,j}$ метрического тензора яввляются гладкими функциями локальных координат, которые не могут быть сделаны постоянными если так называемый **тензор кривизны** $R^l_{i,j,k}$ не обращается в нуль.

Для дифференциальной 2-формы σ аналогом тензора кривизны является **внешний дифференциал**

$$d\sigma = d\sigma_{i,j}(x) \wedge dx^i \wedge dx^j = \partial_k \sigma_{i,j}(x) \wedge dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k.$$

Определение симплектического многобразия включает в себя также условие что форма σ **замкнута**, т.е., $d\sigma = 0$. Хорошо известно, что такая форма не имеет локальных инвариантов. В подходящих локальных координатах $(q^1, \ldots, q^m; p_1, \ldots, p_m)$, называемых **координатами Дарбу**, она принимает вид

$$\sigma = \sum_i dq^i \wedge dp_i.$$

На всяком симплектическом многобразии (M, σ), можно определить **косой градиент (skew-gradient)** гладкой функции f. По определению,

---

[2]В области, где $z = 0$, матричный элемент $(F^2)_{41} = x_1y_2 + x_3y_2$ не зависит от величин, обозначенных звёздочками и является **вторичным G-инвариантом**.

[3]Поскольку такая билинейная форма существует лишь в чётномерных векторных пространствах, всякое симплектической многобразие M само имеет чётную размерность $n = 2m$.

это векторное поле s-grad f на M, такое что

(6) $\qquad \sigma(\text{s-grad}\, f,\, v) = vf \quad$ для всякого вектрного поля v на M.

В координатах Дарбу мы имеем s-grad $f = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\partial_{q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\partial_{p_i}\right)$.

Теперь мы можем определить так называемую, **скобку Пуассона** двух гладких функций на M по формуле

(7) $$\{f_1,\, f_2\} = (\text{s-grad}\, f_1)\, f_2 = -(\text{s-grad}\, f_2)\, f_1 = \sum_i \frac{D(f_1,\, f_2)}{D(p_i,\, q^i)}.$$

Упражнение 1. a) Покажите что скобка Пуассона определяет в пространстве $C^\infty(M)$ структуру алгебры Ли, т.е., выполняется следующее тождество Якоби:

$$\{\{f_1,\, f_2\},\, f_3\} + \{\{f_2,\, f_3\},\, f_1\} + \{\{f_3,\, f_1\},\, f_2\} = 0.$$

b) Следствием этого факта является то, что поля s-grad f - это инфитезимальные симметрии $(M,\, \sigma)$. (Это означает что производная Ли формы σ вдоль s-grad f сводится к нулю.)

Указание. Используйте **формулу Картана** $L_v = \iota_v \circ d + d \circ \iota_v$, где L_v - производная Ли, d - внешний дифференциал и ι_v - внутреннее произведение.

2.2. **Пуассоновы многообразия.** пусть M - гладкое многообразие. Будем называть его **Пуассоновым многообразием** если в пространстве $C^\infty(M)$ структура алгебры Ли $[\cdot,\, \cdot]$ определяется следующими условиями.

1. Отображение $C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)\ :\ \ (f_1,\, f_2) \mapsto [f_1,\, f_2]$ непрерывно в C^∞ топологии.

2. Связано с умножением в $C^\infty(M)$ отношением

(8) $$[f_1,\, f_2 f_3] = [f_1,\, f_2]f_3 + f_2[f_1,\, f_3].$$

Упражнение 2. Покажите что эти условия влекут наличие бивектрного гладкого поля $c = c^{i,j}\partial_i \wedge \partial_j$ на M такого что

$$[f_1,\, f_2] = c^{i,j}\partial_i f_1 \partial_j f_2.$$

Упражнение 3 (Дополнительное)**.** Покажите что всякое Пуассоново многообразие $(M,\, [\cdot\,,\, \cdot])$ может быть разбито на подмногообразия M_α, $\alpha \in A$, (**симплектические листы**) так, что

a) Всякое M_α имеет симплектическую структуру σ_α; обозначим через $[\cdot\,,\, \cdot]_\alpha$ соответствующую скобку Пуассона.

b) Для каждой точки $m \in M_\alpha \subset M$ имеем

(9) $$[f_1,\, f_2](m) \;=\; [f_1|_{M_\alpha},\, f_2|_{M_\alpha}]_\alpha.$$

Упражнение 4. Пусть $\mathfrak{g}$ - алгебра Ли с базисом $(x_1, \ldots, x_n)$ и структурными постоянными c_{ij}^k, такими, что $[x_i,\, x_j] = \sum_k c_{ij}^k x_k$. Пусть $\mathfrak{g}^*$ - двойственное векторное пространство. Рассмотрим $(x_1, \ldots, x_n)$ в качестве координат на $\mathfrak{g}^*$. Покажем что

a) бивектор $c = c_{ij}^k x_k \partial^i \wedge \partial^j$ определяет на $\mathfrak{g}^*$ структуру Пуассонова многообразия

b) роль симплектических листов на $\mathfrak{g}^*$ выполняют коприсоединённые орбиты.

2.3. **Универсальность $\mathfrak{g}^*$.** Пусть G - односвязная группа Ли и $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ - её алгебра Ли. Рассмотрим категорию $mathcalPG$ Пуассоновых G-многообразий, где объектами являются Пуассоновы многообразия

$(M,\, [\cdot\,,\,\cdot])$, на которых группа G действует так, что выполняется следующее условие.

Пусть L_X - векторное поле на M, соответствующее $X \in \mathfrak{g}$. Имеется гомоморфизм $X \mapsto f_X$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли $(C^\infty(M),\, [\cdot\,,\,\cdot])$ такой, что для каждого $X \in \mathfrak{g}$, мы имеем $L_X f = [f_X,\, f]$.

Морфизм в $\mathcal{PG}$ из $(M',\, [\cdot\,,\,\cdot]')$ в $(M,\, [\cdot\,,\,\cdot])$ - это гладкое G-эквивариантное отображение $\varphi : M' \to M$, такое что

$$[f_1 \circ \varphi,\, f_2 \circ \varphi] = [f_1,\, f_2]' \circ \varphi,$$

Оказывется, что Пуассоново G-многообразие $(\mathfrak{g}^*,\, c)$ - это **универсальный притягивающий объект** в $\mathcal{PG}$ (т.е., для всякого $(M,\, [\cdot\,,\,\cdot])$ of $\mathcal{PG}$ существует единственный морфизм из $(M,\, [\cdot\,,\,\cdot])$ to $(\mathfrak{g}^*,\, c)$.

Человечким языком, это означает что для всякого Пуассонова G-многообразия $(M,\, [\cdot\,,\,\cdot])$ имеется канонически определённое гладкое отображение μ from M to $\mathfrak{g}^*$, называемое **отображение моментов**. В обозначениях выше функционал $F = \mu(m)$ определён выражением

$$\langle F,\, X\rangle = f_X(m) \quad \text{для всякого} \quad m \in M,\, X \in \mathfrak{g}. \tag{10}$$

Историческая заметка. Понятие отображения моментов - это далеко идущее обобщение понятий импульса и момента импульса в классической механике. Для однопараметрических групп Ли оно упрощается до известной теоремы Эми Нётер о связи между законами сохранения и симметрией. В полной общности он был представлен Дж. Сурьо (J.-M.Souriau, [?S]), Б. Костантом (B.Kostant [?Ko]) и мной [?K0, ?K1, ?K8].

E-mail address: kirillov@math.upenn.edu