

### Семинары 3-4

1. Пусть  $(M, g)$  – риманово многообразие,  $P_t: T_{\gamma(0)}M \rightarrow T_{\gamma(t)}M$  – параллельный перенос вектора вдоль кривой  $\gamma$  относительно связности Л-Чивита. Покажите, что  $P_t$  – изометрия и, если  $M$  ориентировано, то  $P_t$  сохраняет ориентацию.
2. Пусть  $M \subset E^3$  – поверхность в евклидовом пространстве с индуцированной римановой метрикой,  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$  – гладкая кривая на  $M$  и  $V$  – векторное поле, касательное к  $M$  вдоль  $\gamma$  (т.е.  $V: [0, 1] \rightarrow E^3$ ,  $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$ ). Покажите, что  $V$  параллельно в смысле Л-Ч тогда и только тогда, когда  $dV/dt \perp T_{\gamma(t)}M$ .
3. Написать уравнения геодезических на сфере  $S^2$  и цилиндре  $x^2 + y^2 = 1$  в  $E^3$ , решите эти уравнения, опишите найденные решения геометрически.
4. Рассмотрим верхнюю полуплоскость  $\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$  с метрикой  $(dx^2 + dy^2)/y^2$ . Вычислите символы Кристоффеля для связности Л-Ч.
5. Напишите уравнения геодезических для связности из задачи 4, решите его и дайте геометрическое описание решений.
6. Пусть  $V_0 = (0, 1)$  – касательный вектор в точке  $(0, 1) \in \mathbb{R}^2_+$ , а  $V_t$  – результат его параллельного переноса вдоль кривой  $x = t, y = 1$ . Найти угол вектора  $V_t$  с направлением оси  $y$  (по или против часовой стрелки).
7. Опишите параллельный перенос Л-Ч касательного вектора к параллели на сфере  $S^2$  вдоль этой параллели.