Лекция 7-19. Ряды и преобразования Фурье для голоморфных функций

ЛОЗУНГ: ГЛАДКОСТЬ - СТЕПЕНЬ, АНАЛИТИЧНОСТЬ - ЭКСПОНЕНТА!

1 Напоминания из комплексного анализа

- Определение голоморфных функций.
- Интеграл Коши.
- Интегральная теорема Коши.
- Интегральная формула Коши.
- Вычеты.

2 Ряды Фурье для голоморфных функций

thm:coef **Теорема 1** *Коэффициенты Фурье голоморфной функции на окружности убывают экспоненциально. Более подробно, пусть функция f голоморфна в полосе $|\ Im\ z| < \delta$, и $\max_{|\ Im\ z| \leq \delta} |f(z)| = M$. Тогда f_k – k-й коэффициент Фурье функции f – удовлетворяет неравенству:*

$$|f_k| \leq M e^{-\delta |k|}. \qquad (1)$$ eqn:exp

Доказательство По известной формуле,

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Пусть $k < 0$. Рассмотрим прямоугольник Π с вершинами $-\pi, \pi, \pi + i\delta, -\pi + i\delta$ и пусть Γ – его положительно ориентированная граница. Обозначим его нижнюю горизонтальную сторону через σ; тогда верхняя будет $\sigma + i\delta$. Докажем, что

$$f_k = \int_{\sigma + i\delta} f(z) e^{-ikz} dz.$$

Действительно, по теореме Коши

$$\int_{\Gamma} f(z) e^{-ikz} dz = 0. \qquad (2)$$ eqn:coef

Но Γ – ориентированная граница прямоугольника Π, правая вертикальная сторона которого получается из левой переносом на 2π. А подинтегральная функция в интеграле (2) 2π-периодична. Поэтому ее интегралы по (противоположно ориентированным) вертикальным сторонам взаимно уничтожаются, а интегралы по горизонтальным сторонам равны:

$$\int_\sigma f(z)e^{-ikz}dz = \int_{-\pi+i\delta}^{\pi+i\delta} f(z)e^{-ikz}dz.$$

Но

$$\max_{\sigma+i\delta} |f(z)e^{-kz}| \le Me^{-ik\delta}.$$

(На самом деле, по принципу аксимума, имеет место знак равенства). Отсюда следует (1). $\square$

3 Функция Гаусса – неподвижная точка преобразования Фурье

(этот раздел войдет в одну из будущих лекций)

thm:fixed **Теорема 2** *Функция Гаусса* $f_0(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ *– неподвижная точка нормализованного преобразования Фурье.*

Доказательство Доказательство получается выходом в комплексную область, и дается прямым вычислением.

$$\hat{f}_0(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\mathbb{R} e^{-\frac{x^2}{2}-i\alpha x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\mathbb{R} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2i\alpha x-\alpha^2)}e^{-\frac{\alpha^2}{2}}dx = \frac{e^{-\frac{\alpha^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_\mathbb{R} e^{-\frac{1}{2}(x+i\alpha)^2}dx := e^{-\frac{\alpha^2}{2}}C(\alpha).$$

Наблюдение: 1 $C(\alpha)$ *не зависит от* α *и равно* 1!

Действительно,

$$\int_\mathbb{R} e^{-\frac{1}{2}(x+i\alpha)^2}dx = \int_{\mathbb{R}+i\alpha} e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

С помощью интегральной теоремы Коши докажите, что

$$\int_{\mathbb{R}+i\alpha} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \int_\mathbb{R} e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

и тем самым, $C(\alpha)$ действительно не зависит от α. Итак, для $C = C(\alpha)$

$$\hat{f}_0(z) = Cf_0(z),$$

то есть функция f_0 – собственная функция для преобразования Фурье с положительным собственным значением. Но преобразования Фурье – изометрия. Следовательно, $C = 1,\ \hat{f}_0 = f_0$.

Попутно мы доказали, что

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

(формула Эйлера-Пуассона). □

4 Вычисление преобразования Фурье с помощью вычетов

Теорема 3 *Пусть P – вещественный многочлен с невещественными корнями. Тогда*

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{P}\right)(\alpha) = \begin{cases} 2\pi i \sum_{Im a>0} res_a \frac{e^{-i\alpha z}}{P(z)},\ \alpha < 0 \\ 2\pi i \sum_{Im a<0} res_a \frac{e^{-i\alpha z}}{P(z)},\ \alpha > 0. \end{cases}$$

Напомним, что если a - простой корень многочлена P, то

$$\operatorname{res}_a \frac{e^{-i\alpha z}}{P(z)} = \frac{e^{-i\alpha a}}{P'(a)}.$$