Лекция 8-19. Поточечная сходимость рядов Фурье

1 Ядро Дирихле

Наша задача - сравнить частные суммы ряда Фурье некоторой функции с самой этой функцией и доказать, что разность между ними стремится к нулю. Подставляя явные выражения для коэффициентов Фурье в частную сумму и меняя местами суммирование и интегрирование, мы получаем выражение вида

$$f_n(x) = \int_{S^1} S_n(x-t)f(t)dt.$$

Функция S_n, называемая ядром Дирихле, вычислена ниже.

Всюду в этой лекции мы расматриваем функции на окружности. Это то же самое, что рассматривать периодические функции на прямой. В дальнейшем эвристическом рассуждении мы говорим о δ-образных последовательностях на окружности. Они определяются так же, как и на прямой, только интегрирование ведется по окружности.

Если бы последовательность S_n была δ-образной, то для любой непрерывной функции выполнялось бы соотношение:

$$\int_{S^1} S_n(x-t)f(t)dt \to f(x). \tag{1}$$

Но последовательность S_n лишь похожа на δ-образную в следующем смысле:

- последовательность S_n стремится к δ-функции в смысле теории обобщенных функций (что бы это ни значило);
- соотношение (1) верно для любой C^1-гладкой функции f.

Вопрос о том, верно ли это соотношение для непрерывных функций, был одной из центральных проблем в теории функций до середины прошлого века. Оказалось, что это соотношение верно, но не всюду, а почти всюду (Карлесон, 1966). Это - одна из труднейших теорем, доказанных в XX веке.

Перейдем к вычислениям. Запишем формулу для коэффициента Фурье функции f с помощью интеграла по окружности:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{S^1} f(t)e^{-ikt}dt.$$

Формула для n-ой частной суммы примет вид:

$$f_n(x) = \Sigma_{-n}^{n} c_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\Sigma_{-n}^{n}(\int_{S^1} e^{-ikt}f(t)dt)e^{ikx} =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{S^1}\Sigma_{-n}^{n} f(t)e^{ik(x-t)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{S^1} f(t)S_n(x-t)dt.$$

Здесь

$$S_n(u) = \Sigma_{-n}^{n} e^{iku}. \tag{2}$$

Последовательность (e^{iku})– геометрическая прогрессия. Ее сумма от $-n$ до n равна

$$e^{-inu}\frac{1-e^{i(2n+1)}u}{1-e^{iu}} = \frac{e^{-inu}-e^{i(n+1)u}}{1-e^{iu}}.$$

Домножим числитель и знаменатель на $e^{-i\frac{u}{2}}$, чтобы сделать выражение симметричным. Получим:

$$S_n(u) = \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})u}-e^{i(n+\frac{1}{2})u}}{e^{-i\frac{u}{2}}-e^{i\frac{u}{2}}} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}$$

Отметим, что $S_n(0) = 2n+1$ и что функция S_n быстро осциллирует и имеет "острый пик" вблизи нуля. Отметим также, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{S^1} S_n(u)du = 1. \tag{3}$$

в силу (2).

2 Первая теорема о сходимости.

Теорема 1 *Пусть* $f \in C^1$. *Тогда*

$$f_n(x) \to f(x)$$

всюду на S^1.

Доказательство (Часть его уже рассказана) Умножим обе части равенства (3) на $f(x)$ и воспользуемся четностью функции S_n. Получим:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{S^1} f(x)S_n(x-t)dt.$$

Следовательно,

$$f_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{S^1}(f(t)-f(x))S_n(x-t)dt.$$

Сделаем замену $t-x=u,\ t=x+u$, и заметим, что S_n - четная функция. При такой замене область интегрирования не изменится и останется окружностью. Параллельный факт для периодичских функций на прямой: интеграл от периодической функции по периоду не зависит от начальной точки интегрирования. Получим

$$f_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{S^1}(f(x+u)-f(x))S_n(u)du = \int_{S^1}\frac{f(x+u)-f(x)}{\sin\frac{u}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})udu.$$

Функция $\sin\frac{u}{2}$ имеет на окружности единственный 0 в нуле. Если $f \in C^1$, то функция

$$g(u) = \frac{f(x+u)-f(x)}{\sin\frac{u}{2}}$$

непрерывна в нуле, и $g(0) = 2f'(0)$. Поэтому

$$f_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{S^1} g(u)\sin(n+\frac{1}{2})udu.$$

Следующая лемма справедлива не только для непрерывных, но и для суммируемых (с квадратом) функций.

Лемма 1 (Лемма Римана) *Пусть* $p \in \mathbb{R}$, $g \in L_2(S^1)$ *и* $J(p) = \int_{S^1} g(u)\sin pudu$. *Тогда* $J(p) \to \infty$ *при* $p \to \infty$.

Доказательство Нам достаточно этой леммы для p полуцелых: $p_n = n + \frac{1}{2}$.

$$J(n+\frac{1}{2}) = (\int_{S^1} g(u)\sin(n+\frac{1}{2})udu = \int_{S^1} g(u)\cos\frac{u}{2}\sin nudu + \int_{S^1} g(u)\sin\frac{u}{2}\cos nudu := a_n + b_n$$

Числа a_n и b_n - коэффициенты Фурье функций $g\cos\frac{u}{2}$ и $g\sin\frac{u}{2}$ с растущими номерами. Последовательности таких коэффициентов стремятся к нулю. □

Из леммы Римана следует, что $f_n(x) - f(x) \to 0$, что и требовалось. □

3 Вторая теорема о сходимости.

Сформулируем аналог предыдущей теоремы для кусочно-непрерывной функции.

Теорема 2 *Пусть функция f на отрезке имеет конечное число точек разрыва первого рода и имеет в них односторонние производные. Пусть она непрерывно дифференцируема в точках непрерывности, и ее производная имеет односторонние пределы, равные односторонним производным, в точках разрыва функции. Тогда ряд Фурье сходится к самой функции в точках непрерывности и к среднему арифметическому односторонних пределов функции в точках разрыва.*

Доказательство Сходимость к функции в точках непрерывности доказывается так же, как и выше. Пусть теперь x - точка разрыва. Положим:

$$a = \frac{f(x+0) - f(x-0)}{2}$$

Отметим, что

$$f(x+0) - a = a - f(x-0) := \delta.$$

Это свойство среднего арифметического играет решающую роль в дальнейшем. Имеем:

$$f(x+u) = f(x+0) + \varphi(u)$$

при $0 \leq u \leq \pi$;

$$f(x+u) = f(x-0) + \psi(u)$$

при $-\pi \leq u \leq 0$; обе функции $\frac{\varphi}{u}$ и $\frac{\psi}{u}$ ограничены. Поскольку функция S_n четная, полагая $t = x + u$, получаем:

$$f_n(x) - a = \int_{S^1} (f(t) - a) S_n(x-t) dt == \int_{S^1} (f(x+u) - a) S_n(u) du.$$

На отрезке $0 \leq u \leq \pi$

$$f(x+u) - a = \delta + \varphi(u).$$

На отрезке $-\pi \leq u \leq 0$

$$f(x+u) - a = -\delta + \psi(u).$$

Следовательно,

$$f_n(x) - a = \int_0^\pi \delta S_n(u) du - \int_{-\pi}^0 \delta S_n(u) du + \int_0^\pi \frac{\varphi(u)}{\sin \frac{u}{2}} \sin(n + \frac{1}{2}) u du + \int_{-\pi}^0 \frac{\psi(u)}{\sin \frac{u}{2}} \sin(n + \frac{1}{2}) u du.$$

Первые два члена взаимно уничтожаются, поскольку функция S_n четная. Два последних члена стремятся к нулю по лемме Римана, как объяснено выше. $\square$