

Дополнительные главы алгебры. Задачи к семинару 6.

Задача 1. Найдите целое замыкание кольца $\mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3)$ в своем поле частных.

Задача 2. Какие элементы в расширении $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)^{S_n}$ целы над $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^{S_n}$?

Задача 3. (а) Линейный оператор $A : \mathbb{Q}^N \rightarrow \mathbb{Q}^N$ таков, что следы всех его степеней целые. Верно ли, что его собственные значения целые алгебраические числа?

(б) А если все числа $\frac{\text{Tr} A^n}{n!}$ целые?

(в) Покажите, что в последнем случае минимальный многочлен оператора A имеет целые коэффициенты.

Задача 4. Найдите все целые алгебраические числа в поле (а) $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$; (б) $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.

Задача 5. Дискриминантом числового поля $K \supset \mathbb{Q}$ называется определитель билинейной формы $(A, B) := \text{Tr} AB$ в базисе кольца целых поля K . Вычислите дискриминант вашего любимого (а) квадратичного; (б) кубического расширения поля \mathbb{Q} .

Задача 6. Какие простые $p \in \mathbb{Z}$ ветвятся в кольце чисел Эйзенштейна $\mathbb{Z}[\omega]$?

Задача 7. (а) Найдите группу Галуа многочлена $x^5 - x - 1$ над \mathbb{Q} . *Указание:* рассмотрите этот многочлен по модулю 5 и по модулю 2. (б) Тот же вопрос для многочлена $x^5 + 3x^4 + 3x^3 - x^2 - x + 2$.