Теория функций комплексного переменного
25 января 2019

1. Найдите все точки, в которых дифференцируемы функции а) $|z|^2$, б) $|z|z$, в) $(\operatorname{Re} z)^2$.

2. Восстановите аналитическую функцию $f(z)$ по условию: а) $\operatorname{Re} f(z) = \sin x \cosh y$, $f(0) = 0$, б) $\operatorname{Re} f(z) = x \sin x \cosh y - y \sinh y \cos x$, $f(0) = 0$, в) $\operatorname{Im} f(z) = y \cos x \cosh y - x \sin x \sinh y$, $f(0) = 2$, г) $|f(z)| = (x^2 + y^2)e^x$, д) $\arg f(z) = xy$.

3. Вычислите интеграл $\displaystyle\int_\gamma (z-a)^n dz$ по контуру $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \le t < 2\pi$, $r > 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

4. Вычислите интеграл $\displaystyle\int_\gamma z^n dz$, где $n \in \mathbb{Z}$, а γ – некоторый путь из a в b. (Убедитесь, что при $n \neq -1$ интеграл не зависит от выбора пути, а при $n = -1$ зависит, и опишите как.)

5. Вычислите интеграл $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + \frac{1}{4}}$ по единичной окружности.

6. Найдите все возможные значения интеграла $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z(z^2-1)}$ при различных выборах контура C (C – замкнутый контур без самопересечений, не проходящий ни через одну из точек $0, 1, -1$).

7. Покажите, что если путь γ, соединяющий точки 0 и 1, не проходит через точки $\pm i$, то

$$\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

где k – целое число.

8. Вычислите интеграл $\displaystyle\oint_{|z|=1} \cos(z^{-1}) dz$.

9. Вычислите интеграл $\displaystyle\int_\gamma \bar{z} dz$, где γ – окружность радиуса R с центром в точке $a \in \mathbb{C}$, проходимая против часовой стрелки.

10. Вычислите интеграл $\displaystyle\int_\gamma \frac{\bar{z}}{z} dz$, где γ – окружность радиуса R с центром в точке a ($|a| \neq R$).

11. Вычислите интегралы (а) $\displaystyle\iint_{\mathbb{C}} e^{-\alpha|z|^2}\, dx\, dy$, (б) $\displaystyle\iint_{\mathbb{C}} e^{-\alpha|z|^2 + az + \bar{a}\bar{z}}\, dx\, dy$.

Направление обхода контуров в контурных интегралах предполагается положительным (против часовой стрелки).