Теория функций комплексного переменного
15 февраля 2019

1. Вычислите интегралы Френеля $\int_0^\infty \cos x^2 dx, \quad \int_0^\infty \sin x^2 dx.$

2. Вычислите интеграл Дирихле $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx.$

3. Вычислите интеграл $\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\, dx.$

4. Разложите в ряд Тейлора следующие функции и найдите области сходимости рядов:

(а) $f(z) = \frac{z}{1-z-z^2}$ в точке $z = 0$,

(б) $f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 5}$ в точке $z = 1$,

(в) $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ в точке $z = 0$ (эта функция называется *функцией Кёбе*. На что она отображает единичный диск?),

(г) $f(z) = \sin^2 z$ в точке $z = 0$,

(д) $f(z) = \frac{e^z - z - 1}{z^2}$ в точке $z = 0$,

(е) $f(z) = \int_0^z \frac{e^t - 1}{t}\, dt$ в точке $z = 0$.

5. Найдите $f'''(0)$, где $f(z) = e^{\sin z}$.

6. Найдите первые три члена разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ функции (а) $\frac{z}{(1-z^2)\sin z}$, (б) $e^{z+\cos z}$.

7. Выпишите ряд Тейлора для функции $f(z)$, удовлетворяющей условиям $f(0) = 0$, $f(z) = z + f(z^2)$, и найдите радиус сходимости ряда.

8. Определите порядок нуля $z = a$ функции $f(z)$, если

(а) $f(z) = (\cos 3z - \cos 5z)^2(1 - \cos 2z)^3$, $a = 0$;

(б) $f(z) = (z^2 - \pi^2)^3 \sin^3 z$, $a = \pi$;

(в) $f(z) = (z^4 + 2z^3 - 2z - 1)^2(e^{i\pi z} + 1)^3$, $a = -1$;

(г) $f(z) = e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}$, $a = 0$.

9. Найдите радиусы сходимости рядов:

(а) $\sum_{n=0}^\infty \frac{n}{2^n} z^n$, (б) $\sum_{n=0}^\infty \frac{n!}{n^n} z^n$, (в) $\sum_{n=0}^\infty z^{n!}$, (г) $\sum_{n=0}^\infty \cos(in)\, z^n$,

(д) $\sum_{n=0}^\infty (3 + (-1)^n)^n z^n$.

10. Докажите, что в разложении $\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^\infty \frac{B_n}{n!} z^n$ все коэффициенты B_n (числа Бернулли) с нечетными номерами равны 0 кроме B_1 и найдите радиус сходимости ряда.

11. Для любого $a \in \mathbb{C}$ положим $(a)_n = a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)$ (символ Похгаммера).

(а) Определите радиус сходимости ряда

$$F(a,b;c;z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n}\, z^n.$$

(б) Докажите, что функция $F = F(a,b;c;z)$, задаваемая этим рядом, удовлетворяет дифференциалному уравнению

$$z(1-z)\frac{d^2F}{dz^2} + [c-(a+b+1)z]\frac{dF}{dz} - abF = 0.$$

Функция $F(a,b;c;z)$ называется *гипергеометрической функцией.*

12. Полиномы Эрмита $H_n(z)$ определяются разложением

$$e^{2tz-t^2} = \sum_{n\geq 0} \frac{H_n(z)}{n!}\, t^n.$$

Докажите соотношение $H_{n+1}(z) = 2zH_n(z) - 2nH_{n-1}(z)$.

13. Найдите все особые точки и определите их характер у следующих функций: (а) $\dfrac{1}{1-\sin z}$, (б) $\dfrac{z}{\sin(z^3)}$, (в) $\operatorname{ctg}(1/z)$, (г) $\dfrac{1}{e^{z^2}+1}$.