

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО
22 ФЕВРАЛЯ 2019

1. Найдите все особые точки и определите их характер у следующих функций: (а) $\frac{1}{1 - \sin z}$, (б) $\frac{z}{\sin(z^3)}$, (в) $\operatorname{ctg}(1/z)$, (г) $\frac{1}{e^{z^2} + 1}$,

(д) $\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$, (е) $\frac{z^3}{\sin^2 \frac{\pi}{z+1}}$.

2. Найдите вычеты дифференциальных форм в их особых точках:

а) $\frac{z dz}{z^2 + 1}$, б) $\frac{e^z dz}{(z - 1)^2}$, в) $\frac{z dz}{\sin^2 z}$, г) $\frac{z^{2n} dz}{(z - 1)^n}$, д) $\frac{e^{1/z} dz}{1 - z}$, е) $\sin z \sin(1/z) dz$,

ж) $\frac{\sin 3z - 3 \sin z}{\sin z (\sin z - z)} dz$ в точке $z = 0$, з) $z^2 \sin \frac{1}{z+1} dz$, и) $\frac{dz}{z(e^{2z} - 1)}$ в точке $z = 0$, к) $e^{z/(1-z)} dz$.

3. Докажите, что для четной функции $f(z)$ имеет место равенство

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) dz = -\operatorname{res}_{z=-a} f(z) dz$$

а для нечетной

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) dz = \operatorname{res}_{z=-a} f(z) dz$$

4. Вычислите интегралы: а) $\oint_{|z|=4} \frac{z^4 dz}{e^z + 1}$, б) $\oint_{|z|=1} \frac{e^z dz}{(2z + 1)^2 (z + 2)}$,

в) $\oint_{|z|=1} (z + 1)e^{1/z} dz$, г) $\oint_{|z|=1} \frac{z^3 dz}{2z^4 + 1}$, д) $\oint_{|z|=3} \frac{z^3 - 1}{z - 1} \left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}} \right) dz$,

е) $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{e^{2/z} - e^{1/z}}$, ж) $\oint_{|z|=3} \frac{dz}{(z - 1)^2 (1 - \cos z)}$, з) $\oint_{|z|=1} \frac{z - (\log 2)^{-1}}{e^{1/z} - 2} dz$.