Материалы к семинарам по матанализу (четвёртый семестр)

7-я и 8-я недели (25.02 — 07.03.2019)

Примерные задачи семинаров

Поточечная сходимость рядов Фурье

Задача 4.1. Пусть $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e^{inx}$ — ряды Фурье функций, принадлежащих пространству $L_2[-\pi,\pi]$. Докажите, что ряд Фурье $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_n e^{inx}$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$ к непрерывной 2π-периодической функции.

Преобразование Фурье и его свойства

Определение 1. *Преобразованием Фурье* $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ называется функция $\hat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданная формулой

$$\hat{f}(\lambda) = \mathcal{F}(f)(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x}\, dx.$$

Обратным преобразованием Фурье называется функция

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x}\, dx.$$

Задача 4.2. Выведите следующие алгебраические свойства преобразования Фурье $f(x) \to \hat{f}(\lambda)$:

а) $x \to i\frac{d}{d\lambda}$, $\quad \frac{d}{dx} \to i\lambda$,

б) $g(x) = f(x-a) \Rightarrow \hat{g}(\lambda) = e^{-i\lambda a}\hat{f}(\lambda)$, $\quad g(x) = e^{iax} f(x) \Rightarrow \hat{g}(\lambda) = \hat{f}(\lambda - a)$,

в) $g(x) = f(ax) \Rightarrow \hat{g}(\lambda) = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{\lambda}{a})$,

г) преобразование Фурье переводит (не)четные функции в (не)четные.

Задача 4.3. Вычислите «табличные» преобразования Фурье:

а) $\chi_{[-a,a]}$, $\quad$ б) $\chi_{[0,\infty)} \cdot e^{-ax}$, $\quad$ в) $\chi_{(-\infty,0]} \cdot e^{ax}$, $\quad$ г) $e^{-a|x|}$, $\quad$ д) e^{-ax^2} $(a > 0)$.

Ответы: а) $\dfrac{2\sin a\lambda}{\lambda}$, $\quad$ б) $\dfrac{1}{a+i\lambda}$, $\quad$ в) $\dfrac{1}{a-i\lambda}$, $\quad$ г) $\dfrac{2a}{\lambda^2+a^2}$, $\quad$ д) $\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\lambda^2/4a}$.

Задача 4.4. Найдите преобразования Фурье следующих функций:

а) $x \cdot \chi_{[-1,1]}$, $\quad$ б) $\sin x \cdot \chi_{[0,\pi]}$, $\quad$ в) $e^{-ax^2}\cos x$, $\quad$ г) e^{-ax^2+bx+c}, $a > 0$, $b, c \in \mathbb{R}$.

Задача 4.5. Для $f \in L_2(\mathbb{R})$ найдите $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))$.

Задача 4.6. Используя интегралы в комплексной области и вычеты, найдите преобразования Фурье следующих функций, являющихся преобразованиями Фурье «табличных» функций:

а) $\dfrac{1}{x \pm ia}$ $(\operatorname{Re} a > 0)$, $\quad$ б) $\dfrac{1}{x^2+a^2}$ $(a > 0)$, $\quad$ в) $\dfrac{\sin ax}{x}$ $(a > 0)$, $\quad$ г) e^{-ax^2} $(a > 0)$.

Задача 4.7. Используя интегралы в комплексной области и вычеты, найдите преобразования Фурье следующих функций:

а) $\dfrac{x}{1+x^2}$, $\quad$ б) $\dfrac{1}{1+x^4}$, $\quad$ в) $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$.

Задача 4.8. Найдите преобразования Фурье следующих функций:

а) $xe^{-\frac{x^2}{2}}$, $\quad$ б) $\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$, $\quad$ в) $\dfrac{\sin x}{x(1+x^2)}$.

Задача 4.9. Вычислите интегралы:

а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$, $\quad$ б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$,

воспользовавшись преобразованием Фурье индикаторной функции и формулой升Планшереля.

Задача 4.10. а) Найдите преобразование Фурье функции e^{-ax^2}, где $a \in \mathbb{C}$ и $\mathrm{Re}(a) > 0$.
б) Распространите полученный результат на случай преобразования Фурье функции

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = e^{-\frac{(Ax,x)}{2}},$$

где A — комплексная симметрическая матрица, такая что ее вещественная часть задаёт положительно определенную квадратичную форму, а мнимая часть мала по сравнению с вещественной (что именно это означает?).
в*) Распространите результат, полученный в пункте (a), на чисто мнимые $a \in \mathbb{C}$.
г*) Вычислите преобразование Фурье функций $\sin ax^2$ и $\cos ax^2$, где $a > 0$.

Задача 4.11. а) Выразите моменты функции $f(x)$ (т.е. величины $\int_{\mathbb{R}} x^n f(x)\,dx$) через коэффициенты Тейлора в нуле ее преобразования Фурье.
б) Пусть $f(x)$ — финитная абсолютно интегрируемая функция. Докажите, что преобразование Фурье $\hat{f}(\lambda)$ продолжается до целой функции комплексного переменного.
в) Пусть $f(x) = 0$ при $x < 0$ и $f(x) < Ce^{ax}$ при $x > 0$, где $a > 0$. Докажите, что в этом случае преобразование Фурье $\hat{f}(\lambda)$ продолжается до функции, аналитической в полуплоскости $\mathrm{Im}\,\lambda < -a$.

Задача 4.12. Найдите преобразование Фурье функции $\mathrm{Sign(t)}\sqrt{|t|}e^{-|t|}$.

Задача на повторение

Задача 4.13. При каких значениях $\alpha \in \mathbb{R}$ следующая функция f принадлежит $L_2(\mathbb{R}^n)$:
а) $f(x) = (1 + \|x\|)^\alpha$, б) $f(x, y) = (1 + |xy|)^\alpha$ $(n = 2)$?