

# Материалы к семинарам по матанализу (четвёртый семестр)

дополнительные задачи на 6-ю неделю (18 — 22.02.2019)

## Примерные задачи семинаров

### Вычисление преобразований Фурье

**Задача 3.10.** Вычислите преобразование Фурье для следующих функций:

- а)  $\chi_{[-a,a]}(x)$ ;    б)  $\chi_{[0,2\pi]}(x)$ ;    в)  $x\chi_{(-1,1)}(x)$ ;    г)  $\cos x \cdot \chi_{(-\pi/2,\pi/2)}(x)$ ;  
д)  $e^{-ax}\chi_{(0,+\infty)}(x)$ ;    е)  $e^{-a|x|}$ ;    ж\*)  $\sin at/t$ .

**Задача 3.11.** Вычислите преобразование Фурье для следующих функций, используя теорему Коши о вычетах:

- а)  $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-x^2/2\sigma^2}$ ;    б)  $\frac{1}{1+x^2}$ .

**Задача 3.12.** Пусть  $f_n$  —  $\delta$ -образная последовательность.

- а) Найдите предел её преобразования Фурье  $\hat{f}_n(t)$  при любом  $t$ .  
б) Будет ли сходимость к этому пределу равномерной на всём  $\mathbb{R}$ ?  
в\*) Будет ли она равномерной на любом отрезке  $[-C, C]$ ?

**Задача 3.13\*** Пусть  $P$  — многочлен без вещественных корней.

- а) Докажите, что преобразование Фурье функции  $1/P$  бесконечно дифференцируемо везде, кроме, быть может, начала координат.  
б) Что можно сказать о производных этой функции в начале координат?

### Явление Гиббса

**Задача 3.14\*** а) Пусть  $f$  —  $2\pi$ -периодическая функция, равная 1 на  $(0, \pi)$  и  $(-\pi, 0)$  и  $(-\pi, -2\pi)$  (*меандр*). Разложите её в ряд Фурье по системе  $SC$ .

- б) Пусть  $S_{2N-1}(x)$  — частичные суммы этого ряда. Найдите экстремумы функции  $S_{2N-1}$ .  
в) Найдите тот экстремум, в котором разность  $|S_{2N-1} - f|$  максимальна. Найдите асимптотику этой разности при  $N \rightarrow \infty$ .