Листок 2.5

Преобразование Фурье

срок сдачи (включая задачи со звёздочкой) 12 апреля

Задача 1. При наличии необходимых производных докажите равенство

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx + b'(y)f(b(y),y) - a'(y)f(a(y),y).$$

Задача 2 (Интегральное представление решения уравнения Эйри)**.**
Пусть $L_y f = D_y^2 f - yf$, $h(x,y) = \exp\left(xy - \frac{x^3}{3}\right)$.
а) Найдите $L_y h$.
б) Найдите функцию g, такую что $D_x g = L_y h$.
в*) Докажите, что интеграл $I(y) = \int_\gamma h(z,y)\,dz$, взятый по контуру γ, приходящему из бесконечности по лучу $e^{2\pi i/3}\mathbb{R}^+$ и затем уходящему на бесконечность по лучу $\mathbb{R}^+$, удовлетворяет уравнению Эйри: $I'' - yI = 0$.

Задача 3. Докажите, что если функция финитна и непрерывна, то её преобразование Фурье голоморфно на всей плоскости.

Задача 4. Дайте подробное доказательство следующей леммы из лекции 6:
для функции $f \in C^{2,0}$ при всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено

$$S_l(x) := \frac{1}{2\pi l}\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}/l} \tilde{f}(\alpha)e^{i\alpha x} \to I(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha \quad \text{при } l\to\infty.$$

Задача 5. Найдите преобразование Фурье функции $e^{-\frac{x^2}{2}}$ и докажите, что $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$, используя равенство Парсеваля для преобразования Фурье.

Задача 6.* Рассмотрим вещественный многочлен P, все корни которого просты и невещественны. Докажите, что вне нуля преобразование Фурье функции $\frac{1}{P}$ бесконечно дифференцируемо.

Задача 7.* Пусть f — достаточно быстро убывающая функция: $|f(x)| < C/(1+x^2)$. Докажите для неё *формулу Пуассона:*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi k) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{f}(n)e^{inx}.$$

Указание. Левая часть является периодической функцией. Нужно только убедиться, что её коэффициенты Фурье равны $(1/2\pi)\tilde{f}(n)$. Не забудьте проверить сходимость в $L_2(S^1)$ ряда в левой части!

Задача 8. Пусть коэффициенты Фурье периодической функции f экспоненциально убывают: $|\hat{f}_n| \le Ca^{|n|}$, $a<1$. Докажите, что функция f продолжается до аналитической функции в некоторой (какой?) полосе $\{|\operatorname{Im} z| < b\}$.

Задача 9.* Пусть функция f финитна, причём $\operatorname{supp} f \subset [-\pi l, \pi l]$.
а) Докажите, что функция f выражается через значения её преобразования Фурье $\tilde{f}(\alpha)$ на множестве $\mathbb{Z}/l$ следующим образом:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi l}\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}/l} \tilde{f}(\alpha)e^{i\alpha x}\chi_{[-l,l]}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

б) (Формула Котельникова) Выразите преобразование Фурье $\tilde{f}$ в произвольной точке через его значения в точках множества $\mathbb{Z}/l$.