

Задачи к 15.03.

В задачи включены некоторые уже разобранные на прошлом конструкции, которые имеет смысл еще раз вспомнить и продумать.

- (1) Почему $v_2(\mathbb{P}^2)$ не содержится ни в каком линейном подпространстве в $\mathbb{P}^5$?
- (2) Найти размерность пространства квадрик в $\mathbb{P}^5$, проходящих через $v_2(\mathbb{P}^2)$.
- (3) Является ли поверхность $v_2(\mathbb{P}^2)$ пересечением всех проходящих через неё квадрик?
- (4) Доказать, что $V = v_2(\mathbb{P}^2)$ есть множество особых точек детерминантной поверхности, заметаемой хордами поверхности V .
- (5) Доказать, что образ прямой в $\mathbb{P}^2$ при отображении v_2 является коникой в $\mathbb{P}^5$.
- (6) Пусть $v' : \mathbb{P}^2 \setminus \{(1 : 0 : 0)\} \rightarrow \mathbb{P}^4$ — отображение линейным рядом квадратичных форм, зануляющихся в точке $(1 : 0 : 0)$. Покажите, что отображение v' переводит прямые, проходящие через точку $(1 : 0 : 0)$ в непересекающиеся прямые в $\mathbb{P}^4$, пересекающие некоторую прямую $l \in \mathbb{P}^4$. Покажите, что прямая l лежит в замыкании образа $v'(\mathbb{P}^2 \setminus \{(1 : 0 : 0)\})$, и что это замыкание есть ровно $l \cup v'(\mathbb{P}^2 \setminus \{(1 : 0 : 0)\})$.
- (7) Пусть $v' : \mathbb{P}^2 \setminus \{(1 : 0 : 0)\} \rightarrow \mathbb{P}^4$ — отображение линейным рядом квадратичных форм, зануляющихся в точке $(1 : 0 : 0)$. Опишите образ кривых $y^2 = x^3 + x^2$ и $y^2 = x^3$. ($x = x_1/x_0$; $y = x_2/x_0$.)
- (8) Пусть a и b — точки в $\mathbb{P}^2$, $v'' : \mathbb{P}^2 \setminus \{a, b\} \rightarrow \mathbb{P}^3$ — отображение линейным рядом квадратичных форм, зануляющихся в точках a и b . Покажите, что v'' переводит прямые, проходящие через точки a и b (за исключением самой прямой ab) в прямые двух семейств образующих некоторой квадрики $Q \subset \mathbb{P}^3$, отличных от некоторых двух фиксированных образующих l и m , а прямую ab (за исключением точек a и b) отображение v'' переводит в точку p пересечения образующих l и m . Покажите, что эта квадратика Q и есть замыкание образа $v''(\mathbb{P}^2 \setminus \{a, b\})$.
- (9) Покажите, что обратное отображение $(v'')^{-1} : Q \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{P}^2 \setminus ab$ есть проектирование квадрики Q из точки p на плоскость.
- (10) Опишите отображение, задаваемое линейным рядом квадратичных форм, зануляющихся в трёх точках $a, b, c \in \mathbb{P}^2$.