Теория функций комплексного переменного – 2019
Листок 3

срок сдачи 22.03.2019

1. Докажите, что если $f(z)$ имеет полюс в z_0 и голоморфна в её проколотой окрестности, то z_0 существенно особая точка функции $e^{f(z)}$.

2. Покажите, что если целая функция $f(z)$ принимает вещественные значения на вещественной оси и чисто мнимые на мнимой, то она нечётна.

3. Докажите, что если для некоторой области D и гладкой кривой $\gamma \subset D$ функция $f(z)$ голоморфна в $D \setminus \gamma$ и непрерывна в D, то $f(z)$ голоморфна во всей D.

4. Покажите, что если для голоморфной в $\mathbb{C} \setminus 0$ функции $f(z)$ выполняется $|f(z)| < \sqrt{|z|} + \dfrac{1}{\sqrt{|z|}}$, то $f \equiv const$.

5. Покажите, что для всякого многочлена $P(z)$ степени больше трёх с корнями $a_1, \dots, a_n$ среди которых нет кратных выполняется

$$\frac{a_1}{P'(a_1)} + \dots + \frac{a_n}{P'(a_n)} = 0$$

6. Покажите, что для всякого многочлена $P(z)$ выполняется

$$\max_{|z|=1} \left| \frac{1}{z^2} - P(z) \right| \geqslant 1$$

7. Найдите вычет ($n \in \mathbb{N}$)

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{dz}{(1-e^{-z})^n}$$

8. Покажите, что если функция $f(z)$ голоморфна внутри единичного круга $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, непрерывна в замыкании $\overline{\Delta}$ и тождественно равна нулю на верхней полуокружности из границы $\partial\Delta$, то $f(z) \equiv 0$.

9. Покажите, что если функция $f(z)$ голоморфна и непостоянна в внутри единичного круга $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и для некоторых точек $a_1, a_2 \in \Delta$ выполняется $f(a_1) = f(a_2)$, то найдутся такие несовпадающие точки $b_1, b_2 \in \Delta$ что $f(b_1) = f(b_2) \neq f(a_i)$.

10. Докажите, что фазовый портрет голоморфного в области векторного поля не может иметь предельных циклов (изолированных замкнутых орбит)[1]

[1]**Указание:** Можно пользоваться теоремой существования и единственности и теоремой аналитической зависимости от начальных условий для комплексных дифференциальных уравнений.