Лекция 5.
Коприсоединённые орбиты треугольной группы G_n
(Продолжение)

А.А.КИРИЛЛОВ

1. Количество точек и геометрия

1.1. **Общие понятия и примеры.** Заметим, что каждое $\mathcal{O}^*_{n,m}(K)$ - это множество K-точек аффинного алгебраического многообразия $\mathcal{O}^*_{n,m}$ определённого над $\mathbb{Z}$, т.е., подмножество $\mathbb{A}^N$, заданное алгебраическими уравнениями и неравенствами с целыми коэффициентами. При работе с такими многообразиями M, важную информацию можно получить рассмотрев число $M(q)$ точек M над конечным полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов. Например, для "хороших"гладких проективных многообразий M выполняется следующая формула:

$$M(q) = \sum_{k=0}^{\dim M} b_{2k} \cdot q^k, \qquad b_{2k} = \dim H^{2k}(M(\mathbb{C}), \mathbb{R}).$$

Главной причиной для этого служит то, что M может быть представлено как объединение аффинных клеток разных размерностей. Каждая клетка размерности k превносит q^k в $M(q)$ и 1 в b_{2k}.

Для некоторых квазиаффинных алгебраических многообразий величина $M(q)$ - это по-прежнему многочлен в q с целыми коэффициентами (которые, впрочем, могут быть отрицательными).

Пример 1. $M = G_{n,k}$ - многообразие Грассмана из k-плоскостей в n-мерном пространстве. Здесь

$$G_{n,k}(q) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q}{[k]_q \cdot [n-k]_q}$$

- это Гауссов q-биномиальный коэффициент и $[n]_q := 1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}$.

Пример 2. $M = GL_n$, - полная линейная группа порядка n.

$$GL_n(q) = \prod_{k=0}^{n-1} (q^n - q^k).$$

Date: Spring 2019.

Пример 3. Более обще, если $M^c_{a,b}$ - многообразие $(a\times b)$-матриц ранга c, то имеем

$$M^c_{a,b}(q)=\left[\begin{array}{c}a\\c\end{array}\right]_q\cdot\left[\begin{array}{c}b\\c\end{array}\right]_q\cdot GL_c(q).$$

1.2. **Балансирующее отображение.** Иногда более удобно работать с многочленами Лорана в $q^{1/2}$ и $q^{-1/2}$. Определим **балансирующее отображение**

$$k[q]\ni P\to\widetilde{P}\in k[q^{1/2},q^{-1/2}]$$

как

$$\widetilde{P}(q)=P(q)q^{-1/2(M+m)},$$

где $M=\deg P$ и $m=\deg\left[q^MP(q^{-1}\right]$ - это максимальная и минимальная степени ненулевых мономов в P.

Это отображение обладает важными свойствами:

$$a)\ \widetilde{P\cdot Q}=\widetilde{P}(q)\cdot\widetilde{Q}(q),\qquad\qquad b)\ \widetilde{q}=1,$$

которые повзоляют легко его вычислить. [1]

Для демонстрации процедуры балансировки, заметим что нет никакого простого выражения для суммы q-биномиальных коэффициентов, но для соответствующих балансированных величин, удобная формула имеется

$$\sum_{k=0}^{n}\widetilde{\left[\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right]_q}=\prod_{s=1}^{n}(1+q^{\frac{n+1-2s}{2}}).$$

1.3. **Маломерные коприсоединённые орбиты. Кластеры.** В нашем случае, величины $\mathcal{O}^*_{n,m}(q)$ и,следовательно, $\mathcal{O}^*_n(q)$ оказываются многочленами в q с целыми коэффициентами. Явное вычисление этих многочленов - довольно трудная комбинаторная задача. Ещё более загадочно их поведение при $n\to\infty$. Даже асимптотики последовательности $\{\mathcal{O}^*_n(q)\}$ для данного q неизвестны. Несмотря на это, поведение $\mathcal{O}^*_{n,m}(q)$ для данного q и m сравнительно просто.

Теорема 1. *Для данного q и m имеем*

$$\mathcal{O}^*_{n,m}(q)=q^n\cdot L_m(n),$$

где L_m - это многочлен степени m с коэффициентами из $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы основано на наблюдении, что для заданных q, m и $n\to\infty$ множество $\mathfrak{g}^*_{n,m}(K)$ имеет *структуру кластера.* Это означает что ненулевые элементы матриц $F\in\mathfrak{g}^*_{n,m}(K)$ немногочисленны и и собраны в группы, называемые *кластерами.* Для ясности введём некоторые обозначения и определения.

[1] Отметим, что величина $\widetilde{\mathbb{P}^{n-1}}(q)=\frac{q^{n/2}-q^{-n/2}}{q^{1/2}-q^{-1/2}}=\widetilde{[n]}_q$ часто понимается как “квантовый аналог” целого числа n, а величина $\widetilde{\mathcal{F}^n}(q)$, где $\mathcal{F}^n$ - это (полное) многообразие флагов, - как квантовый аналог $n!$.

Пусть $\mathfrak{b}_n^-(K)$ обозначает множество не строго нижнетреугольных матриц в $\mathrm{Mat}_n(K)$. С каждым $F \in \widehat{G}_{n+1}(K)$ будем ассомциировать матрицу $\bar{F} \in \mathfrak{b}_n^-(K)$, полученную из F удалением первой строки и последнего столбца. Простое, но полезное наблюдение: $\mathrm{rk}\, B_F$ зависит лишь от нижней части $\bar{F}$ (т.е. не зависит от диагональной части $\bar{F}$).

Теперь, назовём элементы $\bar{F} \in \mathfrak{b}_n^-(K)$ *разложимыми*, если он имеет блочно-диагональную форму:

$$\bar{F} = \bar{F}_1 \oplus \bar{F}_2 \oplus ... \oplus \bar{F}_r, \quad r > 1,$$

где $\bar{F}_i \in \mathfrak{b}_{n_i}^-(\mathbb{F})$ и $\sum_{i=1}^r n_i = n$.

Лемма 1. *При выполнении условий выше имеем:*

$$rk\, B_F = \sum_{i=1}^{r} rk\, B_{F_i}. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $\{X_{i,j}\}, 1 \leq i < j \leq n+1$, - это стандартный базис в $\mathfrak{g}_{n+1}(K)$ и $\left\{X_{i,j}^*\right\}$ - это двойственный базис в $\widehat{G}_{n+1}(K)$. Тогда

$$B_F = \sum_{i<k<j} f_{j,i} \cdot \{X_{i,k}^*\} \wedge \{X_{k,j}^*\}.$$

Теперь легко заметить что 2-формы B_{F_i}, соответствующие разным слагаемым в (1) зависят от непересекающихся множеств $\left\{X_{i,j}^*\right\}$. Это делает лемму очевидной.

Определим теперь **кластер** (или **элементарную частицу**) **размера** n и **массы** (или **энергии**) m как неразложимый элемент $\bar{F} \in \mathfrak{b}_n^-(K)$ ассиированный с элементом $F \in \mathfrak{g}_{n+1,m}^*(K)$.

Из этого определения следует что для всякого $F \in \mathfrak{g}_{n+1,m}^*(K)$ ассоциированный $\bar{F} \in \mathfrak{b}_n^-(K)$ разбивается на определённое количество кластеров с размерами $n_1, ..., n_r$ и массами $m_1, ..., m_r$, такими что

$$\sum_{i=1}^{r} n_i = n, \qquad \sum_{i=1}^{r} m_i = m.$$

также ясно что для всякого q имеется лишь конечное число кластеров массы m. Обозначим как $C_{\nu,\mu}(q)$ число кластеров размера ν и массы μ . Тогда стандарное комбинаторное рассуждение доказывает:

Предложение 1.

$$\sum_{n,m} \mathfrak{g}_{n+1,m}^*(q) t^m x^n = (1 - \sum_{\nu,\mu} C_{\nu,\mu}(q) t^\mu x^\nu)^{-1}.$$

Следствие.

$$\mathcal{O}_{n+1,m}(q) = q^{-2m} \cdot \left\{ \text{коэффициент } t^m x^n \text{ в } (1 - \sum_{\nu,\mu} C_{\nu,\mu}(q) t^\mu x^\nu)^{-1}. \right\} \tag{2}$$

Теперь можно получить утверждение из теоремы это этого предложения. Заметим что $C_{1,0} = q$: соответствующие кластеры ("фотоны") - это просто матрицы порядка 1 с коэффициентами из $\mathbb{F}_q$.

Более того, $C_{n,0} = 0$ при $n > 1$, поскольку все частицы размера $n > 1$ имеют ненулевую массу (соответствующая 2-форма B_F ненулевая).

Из этго можно заключить что правая часть (1.4.4) может быть записана в виде:

$$[1 - qx - t\Phi(q, x, t)]^{-1}$$

для некоторых $\Phi \in \mathbb{Z}[q]\,[[x, t]]$. Это означает, что правая часть (1.4.5) равна кожффиценту x^n из

$$\frac{\Psi(q, x, t)}{[1 - qx - t\Phi(q, x, t)]^{m+1}}\ |_{t=0} = \frac{\Psi(q, x, 0)}{(1 - qx)^{m+1}}$$

для некоторых $\Psi \in \mathbb{Z}[q]\,[[x, t]]$. И этот кожффициент, очевидно, (1.4.1).

В качестве иллюстрации, приведём описание кластеров для малых m и соответствующие явные формулы для $\mathcal{O}_{n,m}$.

m = 0. Ясно что $\mathcal{O}^*_{n,0}(q) = q^{n-1}, \quad n \geq 1$. Это можно формально вывести из соотношения выше $C_{n,0} = q \cdot \delta(n)$.

m = 1. Можно убедиться что $C_{2,1} = q^2(q - 1), C_{3,1} = q^3(q - 1)^2$ и $C_{n,1} = 0$ при $n > 3$. Соответствующие $\bar{F}$ имеют вид:

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ \lambda & y \end{pmatrix} \quad \text{И} \quad \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ \lambda & y & 0 \\ 0 & \mu & z \end{pmatrix}$$

где $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_q^\times, x, y, z \in \mathbb{F}_q$. Отсюда следует что:

$\mathcal{O}^*_{n,1}(q) = q^{n-3}(q - 1)(nq - 3q + 1), \quad n \geq 3.$

m = 2. Кластеры массы 2:

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & y & 0 & 0 \\ 0 & \mu & z & 0 \\ 0 & 0 & \nu & u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & y & 0 & 0 & \\ 0 & \mu & z & 0 & \\ 0 & 0 & \nu & u & \\ 0 & 0 & 0 & \rho & v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & z & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & r & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & v \end{pmatrix},$$

где все латинские буквы принимают значения из $\mathbb{F}_q$ а греческие буквы - из $\mathbb{F}_q^\times$. Следовательно, $C_{4,2}(q) = q^4(q - 1)^3,\ C_{5,2}(q) = q^9(q - 1) + q^5(q - 1)^4,\ C_{n,2} = 0$ для $n > 5$. $\quad\square$

1.4. **Статистика коприсоединённых орбит.** Информация, содержащаяся в двойной последовательности $\left\{\mathcal{O}^*_{n,m}(q)\right\}$ может быть преобразована в обыкновенную последовательность многочленов

$$\mathcal{O}^*_n(q, t) = \sum_{m \geq 0} \mathcal{O}^*_{n,m}(q) \cdot t^m$$

или в производящей последовательности

$$\mathcal{O}^*(q, t, z) = \sum_{n \geq 0} \mathcal{O}^*_n(q, t) \cdot z^n.$$

В настоящее время мне почти нечего сказать о последней последовательности, кроме кроме очень правдоподобной гипотезы о том, что это формальный степенной ряд в z с нулевым радиусом сходимости для всех $q > 1$ и $t \geq 1$. Напротив, многочлены $\mathcal{O}_n^*(q,t)$ имеют несколько интересных интерпретаций.

Во-первых, теорема 1.2.4 влечёт к тому что послед подстановки $t \to \mu^2 q^2$ значения этих многочленов может быть выражено в виде, напоминающем статсуммы в ститистической квантовой физике:

$$\mathcal{O}_n^*(q,\mu^2 q^2) = \sum_{F \in \widehat{G}(\mathbb{F})} \mu^{\mathrm{rk} B_F}.$$

Другими словами, мы смотрим на $\widehat{G}(\mathbb{F})$ как на своеобразую модель решётки, где $\mathrm{rk} B_F$ выполняет роль функции энергии и $-\log \mu$ - аналог обратной темепратуры $\beta = \frac{1}{kT}$.

Подход, предложенный в [K3] даёт выражение этой функции разбиения для спеиальных сулчаев когда β - неотрицательное целое.

Теорема 2. *Пусть $r > 0$ целое. Тогда*

$$\mathcal{O}_n^*(q, q^{2-2r}) = q^{-rn(n-1)} \cdot \sum_{X,Y,F} \theta(\langle F, [X,Y] \rangle),$$

где X, Y пробегает $\mathfrak{g}_n(\mathbb{F}_{q^r}), F$ пробегает $\mathfrak{g}_n^*(\mathbb{F}_q)$, естественно вложенные в $\mathfrak{g}_n^*(\mathbb{F}_{q^r})$ и θ - это нетривиальный аддитивный характер $\mathbb{F}_{q^r}$.

Доказательство этой теоремы основано на следующих простый фактах. Пусть $V_i, i = 1, 2,$ - конечномерные векторные пространства над $\mathbb{F}$ и $B : V_1 \times V_2 \to \mathbb{F}_q$ - билинейная форма. Для всякого целого $r \geq 1$ можем рассмотреть $V_i^{(r)} = V_i \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^r}$ и расширить B на $\mathbb{F}_{q^r}$-линейность до билинейной формы $B^{(r)} : V_1^{(r)} \times V_2^{(r)} \to \mathbb{F}_{q^r}$.

Лемма 2. *Для вского нетриаивльного аддитивного характера θ из $\mathbb{F}_{q^r}$ имеем*

$$\sum_{v_i \in V_i^{(r)}} \theta(B(v_1, v_2)) = q^{r(\dim V_1 + \dim V_2 - rkB)}.$$

Доказательство леммы. Подходящим выбором базиса в V_1 и V_2 мы можем сократитье B до

$$B(v_1, v_2) = \sum_{j=1}^{\mathrm{rk} B} v_1^j \cdot v_2^j,$$

где $v_i^j, 1 \leq j \leq \dim V_i,$ - это координаты $v_i \in V_i$. Затем воспользуемся формулой

$$\sum_{x \in \mathbb{F}_{q^r}} \theta(xy) = q^r \cdot \delta(y)$$

где $\delta(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } y \neq 0 \\ 1 & \text{if } y = 0, \end{cases}$ и получить результат.

Теперь, применяя формулу к форме B_F, получаем

$$\sum_{X,Y,F} \theta(\langle F, [X,Y] \rangle) = \sum_F q^{r[n(n-1) - \mathrm{rk} B_F]}.$$

Вклад тех F, для которых $\mathrm{rk} B_F = 2m$ составляет:

$$q^{2m} \cdot \mathcal{O}_{n,m}(q) \times q^{r[n(n-1)-2m]}.$$

Это даёт левую часть искомого равенства.

Другая интерпретация многочленов $\mathcal{O}_n^*(q,t)$ возникает если мы примем истинной гипотезу 2.2.1 (см. раздел 2.2 ниже). А именно:

$$\mathcal{O}_n^*(q, q^{-s}) = \sum_{\lambda \in \widehat{G_n(\mathbb{F})}} d(\lambda)^{-s},$$

где $\widehat{g_n^*(\mathbb{F}_q)}$ - это множество (классов эквивалентности) унитарных неприводимых представлений $G_n(\mathbb{F}_q)$, а $d(\lambda)$ - это размерность представления класса λ. Эти ζ–подобные суммы могут иметь интересные свойства и будут обсуждены в разделе 3.

Повторим и другой результат из [K4], который является определением более изощрённой функции разбиения, ассоциированной с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_n$.

Конкретнее, положим

$$\Phi_n(Z) = \sum_{X,Y,F} \theta(\langle F, [X,Y] - Z \rangle),$$

где, как и ранее, X, Y пробегают $\mathfrak{g}_n(\mathbb{F}_q), F$ пробегают $\mathfrak{g}_n^*(\mathbb{F}_q)$.

Сопоставим также всякой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ алгебраическое многообразие

$$CP_{\mathfrak{g}} = \{(X,Y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mid [X,Y] = 0\}$$

состоящее из пар коммутирующих элементов из $\mathfrak{g}$.

Теорема 3.

$$\Phi_n(0) = q^{n(n-1)/2} \cdot CP_{\mathfrak{g}_n}(q)$$

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 1.5.1 и также основано н лемме 1.5.2.

Примечание 1. Эта теорема также выполняется для всякой алгебры Ли над $\mathbb{F}$. Напротив, равенство $\Phi_n(0) = q^{n(n-1)} \cdot \mathcal{O}_n^*(q)$ должно быть заменено для общей алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на

$$\Phi_n(0) = q^{2\dim \mathfrak{g}} \cdot \sum_{\Omega \in \widehat{G}/G} \mathrm{ind}(\Omega),$$

где $\mathrm{ind}(\Omega) = q^{-\dim \Omega} \cdot \#\Omega$. If $\Omega \simeq \mathbb{A}^{2m}$, имеем $\mathrm{ind}(\Omega) = 1$.

Своеобразные модели решёток стали сравнительно популярны в последнее время. Мы отсылаем заинтересованного читателя к статье [MS], где некоторые из этих моделей обсуждаются.

1.5. **Треугольник Эйлера-Бернулли.** Численные расчёты малых n в простейшем случае $q = 2$ ведут к примечательному ннаблюдению: последовательность $\{\mathcal{O}_n^*(2)\}$ очень позожа на $\{K_n\}$, так называемых *чисел Эйлера - Бернулли*, определённых производящей функцией

$$\sum_{n\geq 0} K_n \frac{x^n}{n!} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$$

Конкретнее, имеем (см. K2, K3).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathcal{O}_2^*(n)$	?	1	2	5	16	61	275	1430	8506	57205
K_{n+1}	1	1	2	5	16	61	272	1385	7936	50521

К сожалению, следующие три члена второй строки напрямую вычислить слишком трудно. (Первые 6 значений были вычислены "вручную"моим бывшим учеником А. Михайловым около 20 лет назад. Следующие 3 взяты из [G].)

Напротив, для вычисления последовательности $\{K_n\}$ существует очень просто и эффективный способ ([A1], [A2], [KB]). Рассмотрим треугольную таблицу – так называемый *треугольник Эйлера-Бернулли*:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & a_{00} & & & & \\
 & & & a_{10} & \longleftarrow & a_{01} & & & \\
 & & a_{02} & \longrightarrow & a_{11} & \longrightarrow & a_{20} & & \\
 & a_{30} & \longleftarrow & a_{21} & \longleftarrow & a_{12} & \longleftarrow & a_{03} & \\
a_{04} & \longrightarrow & a_{13} & \longrightarrow & a_{22} & \longrightarrow & a_{31} & \longrightarrow & a_{40}
\end{array}$$

который заполняется в соответствии с правилами:

1) $a_{0,n} = \delta(n)$;

2)$a_{k,l} = a_{k-1,l+1} + a_{l,k-1},\ k \geq 1,\ l \geq 0$.

Числовые значения первых шести строк:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & \longleftarrow & 0 & & & & \\
 & & & 0 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 1 & & & \\
 & & 2 & \longleftarrow & 2 & \longleftarrow & 1 & \longleftarrow & 0 & & \\
 & 0 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 5 & \longrightarrow & 5 & \\
16 & \longleftarrow & 16 & \longleftarrow & 14 & \longleftarrow & 10 & \longleftarrow & 5 & \longleftarrow & 0
\end{array}$$

Другими словами, число в конце последовательности равно сумме последнего текущего члена последовательности и числа над ними

Возникает заманчивая гипотеза что существует q-аналог треугольника Эйлера-Бернулли, чьи боковые элементы позволяют посчитать количество коприсоединённых орбит в $\mathfrak{g}_n^*(\mathbb{F}_q)$.

Конкретнее, оставим правило 1) и заменим 2) двумя более тонкими:

2′) $a_{k,l} = t^{-1}a_{k-1,l+1} + (q-1)t^{l-1}a_{l,k-1}$ for $k \geq 1,\ l \geq 1$;

$2''$) $a_{n,0} = (q-1)^{-1} a_{n-1,1}$ Таким образом, получим треугольную таблицу, чьи элементы - многочлены в q и t. Первые несколько рядов таковы:

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \longleftarrow 0 \\
0 \longrightarrow q-1 \longrightarrow 1 \\
q \longleftarrow q(q-1) \longleftarrow (q-1)t \longleftarrow 0 \\
0 \to q(q-1)t^2 \longrightarrow q^2(q-1)t \longrightarrow q^2(q-1)+(q-1)^2 t \to q^2+(q-1)t
\end{array}$$

Оказывается что $a_{n,0}(q,t) = \mathcal{O}_n^*(q,t)$ для $n \le 5$.

Теперь естественно предположить что остальные величины $a_{k,l}(q,t)$ также могут быть интерпретированы в смысле орбит. Нетрудно проверить индуктивно, что $2'$ и $2''$ приводят к равенству

$$a_{n+1,0}(q,t) = \sum_{k+l=n} a_{k,l}(q,t).$$

Поэтому, интерпретация с точки зрения орбит $a_{k,l}(q,t)$ должна быть связана со стратификацией множества $\mathcal{O}_n^*(q)$. А именно, $a_{k,l}(q,t) =$ $= \sum_m a_{k,l}^m(q) t^m$ где $a_{k,l}^m(q)$ - это число 2m-мерных орбит в k-м стратуме $\widehat{G}_{n,m}(\mathbb{F})$. Правильная стратификация может быть определена следующим образом. Пусть $X_{k,l} \subset \widehat{G}_{k+l}(\mathbb{F})$ определено следующими условиями на коэффициентах $\{f_{i,j}\}$ of $F \in \widehat{G}_{k+l}(\mathbb{F})$:

$$f_{n,1} = \dots = f_{n,k-1} = 0, \quad f_{n,k} \ne 0;\ n = k+l.$$

Пусть $x_{k,l}^m(q)$ обозначает число 2m-мерных орбит в $X_{k,l}$ и пусть $x_{k,l}(q,t) = \sum_m x_{k,l}^m(q) t^m$. В [K4] мы установили что $x_{k,l}(q,t) = a_{k,l}(q,t)$ для $k+l \le 6$ с единственным исключением: $x_{4,2}(q,t) - a_{4,2}(q,t) = (q-1)^3 t^2 (t-q)(t-q^2) \ne 0$.

Примечание 1. Следующая формула предполагает что обобщённый треугольник Эйлера-Бернулли может иметь специальные свойства когда $t = q$ либо $t = q^2$. В самом деле, для $t = q^2$ он выглядит как:

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \longleftarrow 0 \\
0 \longrightarrow q-1 \longrightarrow 1 \\
q \longleftarrow q^2-q \longleftarrow q^3-q^2 \longleftarrow 0 \\
0 \longrightarrow q^6-q^5 \longrightarrow q^5-q^4 \longrightarrow q^4-q^3 \longrightarrow q^3 \\
q^6 \longleftarrow q^7-q^6 \longleftarrow q^8-q^7 \longleftarrow q^9-q^8 \longleftarrow q^{10}-q^9 \longleftarrow 0
\end{array}$$

Случай $t = q$ всё ещё изучается. *Примечание 2.* Ещё более интригующим является следующее совпадение: для $q = 3,\ t = 1$, последовательность $\{x_{n,0}\}$ имеет те же первые элементы 1, 1, 1, 3, 11, 57, 361, ... что и $\{b_n\}$ чисел Спрингера типа D_n (см. [A2], [Sh]).

Всё это порождает множество интересных, но довольно сложным проблем. Приведём здесь лишь три из них.

1. Можно ли отыскать одну явную формулу для $a_{k,l}(q,t)$ или подходящую производящую функцию?

Заметим, что в случае $q=2, t=1$ наш обобщённый треугольник Эйлера-Бернулли становится обычным и выполняется следующее условие:

$$A(u,v) := \sum_{k,l} a_{k,l}(2,1)\frac{u^k}{k!}\frac{v^l}{l!} = \frac{\cos v + \sin u}{\cos(u+v)}.$$

Оно может быть получено из дифференциального уравнения и начального условия которым удовлетворяет $A(u,v)$:

$$(\partial_u - \partial_v)A(u,v) = A(v,u), \qquad A(0,v) = 1$$

что следует из правил $2'), 2'')$.

2. Каково поведение асимптотики $a_n(q) := \sum_{k+l=n} a_{k,l}(q,1)$ при $n \to \infty$?

Для $q=2$ (1.6.1) следует что $a_n(2) \approx (\frac{2}{\pi})^n \cdot n!$ но для общего случая у нас нет результатов.

3. Числа Эйлера и Бернулли связаны с ζ-подобными суммами:

$$(-1)^{n-1}B_{2n}\frac{2^{2n}-1}{2(2n)!}\pi^{2n} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^{2n}},$$

$$E_n\frac{1}{2(2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2n+1}}.$$

Недавно в [BCK] была найдена очень остроумная интерпретация этих соотношений в терминах объемов некоторых многогранников. А именно,

$$\frac{K_{n-1}}{2(n-1)!} = \frac{2^{n+1}}{\pi^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{nk}}{(2k+1)^n} = \mathrm{vol}\ (\Delta_n),$$

где Δ_n - это выпуклы многогранник в $\mathbb{R}^n$ определённый условиями:

$$x_i \geq 0,\ x_i + x_{i+1} \leq 1,\ i \in \mathbb{N} \bmod n.$$

Возможно ли найти аналогичные интерпретации для всех элементов треугольника Эйлера-Бернулли и его q-аналога?

E-mail address: kirillov@math.upenn.edu