Дополнительные главы алгебры. Домашнее задание к 20 марта.

Задачи сдаются в письменном виде 20 марта в 14:00 (перед контрольной). На полный балл достаточно решить любые 6 пунктов задач. Номер варианта зависит от первой буквы вашей фамилии: 1-й: А-Д; 2-й: Е–К; 3-й: Л–П; 4-й: Р–Я.

Вариант 1.

Задача 1. **(а)** Найдите кольцо целых поля $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$. **(б)** Вычислите дискриминант этого кольца.

Задача 2. Найдите группу Галуа многочлена $x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 35x^2 - 8x + 5$ над $\mathbb{Q}$.

Задача 3. **(а)** Покажите, что поле частных кольца $\mathbb{C}[x, y]/(y^3 + x^2 + xy)$ изоморфно $\mathbb{C}(t)$, где $t = \frac{x}{y}$.
(б) Найдите целое замыкание кольца $\mathbb{C}[x, y]/(y^3 + x^2 + xy)$ в своем поле частных.

Задача 4. Укажите какие-нибудь образующие идеала в кольце $\mathbb{C}[x, y, z]$, состоящем из многочленов, обращающихся в нуль во всех точках вида (t, t^3, t^4) и во всех точках вида (u^2, ut, t^2).

Задача 5. Укажите какую-нибудь конечную систему образующих алгебры инвариантов действия группы $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ на $\mathbb{C}[x, y]$ преобразованиями $x \mapsto \xi x,\ y \mapsto \xi^3 y$, где ξ – примитивный корень пятой степени из единицы.

Вариант 2.

Задача 1. **(а)** Найдите кольцо целых поля $\mathbb{Q}(\sqrt{11})$. **(б)** Вычислите дискриминант этого кольца.

Задача 2. Найдите группу Галуа многочлена $x^7 - 7x^5 - 14x^4 + 14x^3 - 21x^2 - 8x + 2$ над $\mathbb{Q}$.

Задача 3. **(а)** Покажите, что поле частных кольца $\mathbb{C}[x, y]/(y^3 + x^2 + xy - y^2)$ изоморфно $\mathbb{C}(t)$, где $t = \frac{x}{y}$.
(б) Найдите целое замыкание кольца $\mathbb{C}[x, y]/(y^3 + x^2 + xy - y^2)$ в своем поле частных.

Задача 4. Укажите какие-нибудь образующие идеала в кольце $\mathbb{C}[x, y, z]$, состоящем из многочленов, обращающихся в нуль во всех точках вида (t, t^3, t^4) и во всех точках вида $(u^2 + t^2, 2ut, u^2 - t^2)$.

Задача 5. Укажите какую-нибудь конечную систему образующих алгебры инвариантов действия группы $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ на $\mathbb{C}[x, y]$ преобразованиями $x \mapsto \xi x,\ y \mapsto \xi^2 y$, где ξ – примитивный корень пятой степени из единицы.

Вариант 3.

Задача 1. **(а)** Найдите кольцо целых поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-13})$. **(б)** Вычислите дискриминант этого кольца.

Задача 2. Найдите группу Галуа многочлена $x^7 - 7x^5 - 21x^3 + 35x^2 - 8x + 5$ над $\mathbb{Q}$.

Задача 3. **(а)** Покажите, что поле частных кольца $\mathbb{C}[x,y]/(y^3 + x^2 + 2xy + y^2)$ изоморфно $\mathbb{C}(t)$, где $t = \frac{x}{y}$.

(б) Найдите целое замыкание кольца $\mathbb{C}[x,y]/(y^3 + x^2 + 2xy + y^2)$ в своем поле частных.

Задача 4. Укажите какие-нибудь образующие идеала в кольце $\mathbb{C}[x,y,z]$, состоящем из многочленов, обращающихся в нуль во всех точках вида (t, t^2, t^3) и во всех точках вида $(u^2, 2ut, t^2)$.

Задача 5. Укажите какую-нибудь конечную систему образующих алгебры инвариантов действия группы $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ на $\mathbb{C}[x,y]$ преобразованиями $x \mapsto \xi x,\ y \mapsto \xi^{-2} y$, где ξ – примитивный корень пятой степени из единицы.

Вариант 4.

Задача 1. **(а)** Найдите кольцо целых поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$. **(б)** Вычислите дискриминант этого кольца.

Задача 2. Найдите группу Галуа многочлена $x^7 - 7x^5 + 7x^4 + 14x^3 + 21x^2 - 8x + 2$ над $\mathbb{Q}$.

Задача 3. **(а)** Покажите, что поле частных кольца $\mathbb{C}[x,y]/(y^3 + x^2 - y^2)$ изоморфно $\mathbb{C}(t)$, где $t = \frac{x}{y}$.

(б) Найдите целое замыкание кольца $\mathbb{C}[x,y]/(y^3 + x^2 - y^2)$ в своем поле частных.

Задача 4. Укажите какие-нибудь образующие идеала в кольце $\mathbb{C}[x,y,z]$, состоящем из многочленов, обращающихся в нуль во всех точках вида (t, t^2, t^3) и во всех точках вида $(u^2 + t^2, 2ut, u^2 - t^2)$.

Задача 5. Укажите какую-нибудь конечную систему образующих алгебры инвариантов действия группы $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ на $\mathbb{C}[x,y]$ преобразованиями $x \mapsto \xi x,\ y \mapsto \xi^{-3} y$, где ξ – примитивный корень пятой степени из единицы.