Векторные расслоения

1. Пусть $E \subset \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ состоит из таких пар (l, v), что если рассмотреть $l \in \mathbb{R}P^n$ как прямую в R^{n+1}, то $v \in l$. Пусть $p : E \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ – естественная проекция, индуцированная проекцией из прямого произведения $E \subset \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ на первый сомножитель. Доказать, что $p : E \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ – гладкое векторное локально тривиальное расслоение ранга 1 и найти его склеивающие коциклы при выборе стандартных аффинных подмножеств $\mathbb{R}P^n$ в качестве тривиализирующего покрытия. Это расслоение называется тавтологическим расслоением над $\mathbb{R}P^n$.

2. Построить аналогично тавтологическое расслоение над многообразием Грассмана $G_k(\mathbb{R}^n)$ и найти его склеивающие коциклы.

3. Пусть E – векторное расслоение. Объясните, как строить склеивающие коциклы для расслоений E^*, $E \wedge E$.

4. Являются ли тривиальными касательные расслоения: а) TS^1, б) TS^2, в) TS^3?

5. Приведите пример двух нетривиальных векторных расслоений, таких что их прямая сумма — тривиальное расслоение.

6. Приведите пример двух нетривиальных векторных расслоений, таких что их произведение — тривиальное расслоение.

7. Докажите, что сумма касательного расслоения к двумерной сфере и тривиального расслоения ранга 1 является тривиальным расслоением ранга 3.

8. Найти (с точностью до изоморфизма) все одномерные вещественные расслоения над $\mathbb{R}P^1$.

   Указание: обратите внимание, что локальные базис в сечениях состоит из одного сечения. Если ввести метрику, то над каждой тривиализующей окрестностью соответствующее сечение можно отнормировать. Тогда склеивающие коциклы устроены просто: $g_{\alpha\beta}(x) = \pm 1$.

9. Является ли ориентируемым тривиальное расслоение над $\mathbb{R}P^1$? Является ли ориентируемым тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^1$?

10. Как связаны тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^1$ и лист Мёбиуса, расслоенный над окружностью?

11. Пусть $E \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ – тавтологическое расслоение. Тривиально ли $E \otimes E$?

12. Пусть $E \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ – тавтологическое расслоение. Доказать, что сумма $T\mathbb{R}P^n$ и тривиального расслоения ранга 1 изоморфна $\underbrace{E^* \oplus ... \oplus E^*}_{n+1 \text{ раз}}$.

13. Пусть Y — подмногообразие X. Тогда для каждой точки $x \in Y$ можно определить векторное пространство $N_x := T_xX/T_xY$. Определите на дизъюнктном объединении $NY = \bigsqcup_{x \in Y} N_x$ естественную структуру гладкого многообразия и локально тривиального векторного расслоения над Y. Это расслоение называется нормальным расслоением.

14. Найдите нормальное расслоение к M при диагональном вложении $M \longrightarrow M \times M$, то есть $x \mapsto (x, x)$.

15. Найдите нормальное расслоение к $\mathbb{R}P^n$ при естественном вложении $\mathbb{R}P^n \hookrightarrow \mathbb{R}P^{n+1}$.

16. Пусть $p : E \longrightarrow B$ – локально тривиальное расслоение, U_α – тривиализующие окрестности, а $g_{\alpha\beta}$ – соответствующие склеивающие коциклы. Рассмотрим расслоение f^*E, где $f : M \longrightarrow B$. Докажите, что $f^*g_{\alpha\beta}$, определённые формулой
$$f^*g_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(f(x)),$$
задают склеивающие коциклы для f^*E для тривиализующего покрытия множествами $f^{-1}(U_\alpha)$.

17. Пусть $[z_0 : ... : z_n]$ однородные координаты в $\mathbb{R}P^n$. Напомним, что отображение Веронезе степени d — это отображение $\mu_d : \mathbb{R}P^n \longrightarrow \mathbb{R}P^N$, заданное формулой $\mu_d([z_0 : ... : z_n]) = [... : z_I : ...]$, где z_I – это некоторый моном степени d от $z_0, ..., z_n$, и в правой части стоят все мономы степени d. Например, при $n = 2$ и $d = 2$ получаем отображение $\mathbb{R}P^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^5$, заданное формулой
$$\mu_2([z_0 : z_1 : z_2]) = [z_0^2 : z_1^2 : z_2^2 : z_0z_1 : z_0z_2 : z_1z_2].$$
Найдите обратный образ μ_d^*E тавтологического расслоения E при этом отображении.