

Перестановки, накрытия, интегрируемость  
Записки специального курса  
Высшая школа экономики, 2019

Б. С. Бычков, М. Э. Казарян, С. К. Ландо

16 марта 2019 г.



# Оглавление

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>0</b> | <b>Введение: теорема Окунькова</b>  | <b>1</b>  |
| <b>1</b> | <b>Перестановки и их разложения в произведение транспозиций и перестановок другого вида</b> | <b>3</b>  |
| 1.1      | Простые числа Гурвица   | 3         |
| 1.2      | Теорема Окунькова   | 4         |
| 1.3      | Графы и перестановки  | 5         |
| 1.4      | Числа Гурвица   | 8         |
| 1.4.1    | Простые и общие числа Гурвица   | 8         |
| 1.4.2    | Тропическое вычисление простых чисел Гурвица  | 10        |
| 1.4.3    | Формула Гурвица   | 11        |
| 1.5      | Уравнение транспозиции  | 12        |
| 1.6      | Применение уравнения транспозиции   | 13        |
| 1.7      | Задачи  | 15        |
| <b>2</b> | <b>Представления симметрических групп</b>   | <b>17</b> |
| 2.1      | Диагонализуемость оператора транспозиции  | 17        |
| 2.2      | Групповая алгебра симметрической группы   | 19        |
| 2.3      | Многочлены Шура   | 22        |
| 2.4      | Элементы Юциса–Мерфи  | 24        |
| 2.5      | Задачи  | 26        |
| <b>3</b> | <b>Полубесконечный грассманиан и уравнения Кадомцева–Петвиашвили</b>                        | <b>27</b> |
| 3.1      | Иерархия КП   | 27        |
| 3.1.1    | Уравнения иерархии КП   | 27        |
| 3.1.2    | Вложения грассманианов и уравнения Плюккера   | 28        |
| 3.1.3    | Пространство рядов Лорана и его полубесконечная внешняя степень                             | 30        |
| 3.1.4    | Полубесконечный грассманиан и уравнения КП  | 31        |
| 3.2      | Комбинаторные представители семейства Орлова–Щербина решений уравнений иерархии КП          | 33        |
| 3.2.1    | Описание семейства  | 33        |
| 3.3      | Алгебра Иванова–Керова и пополненные циклы  | 39        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>4</b> | <b>Разветвленные накрытия сферы</b>                         | <b>43</b> |
| 4.1      | Двумерные поверхности . . . . .                             | 43        |
| 4.2      | Склейка двумерных поверхностей из многоугольников . . . . . | 44        |
| 4.3      | Накрытия . . . . .  | 46        |
| 4.4      | Разветвленные накрытия . . . . .                            | 48        |
| 4.5      | Формула Римана–Гурвица . . . . .                            | 49        |
| 4.6      | Перечисление разветвленных накрытий сферы . . . . .         | 51        |
| 4.7      | Геометрия формулы Кэли . . . . .                            | 53        |
| 4.8      | Тригонометрические (лорановские) многочлены . . . . .       | 55        |
| 4.9      | Разложение по родам . . . . .                               | 56        |

## Глава 0

# Введение: теорема Окунькова

В 2000 году появилась работа А. Окунькова, в которой содержалось доказательство того, что производящая функция для связных двойных чисел Гурвица является решением системы уравнений в частных производных, называемой цепочка Тоды. Годом ранее это утверждение (точнее, некоторая его специализация) было высказано Р. Пандарипандой в качестве гипотезы. Его доказательство и предложенная в нем техника связали в единый узел целый ряд бывших до этого независимыми направлений исследований. Среди них:

- восходящее к Гурвицу исчисление разветвленных накрытий двумерных поверхностей, являющееся одним из предвестников современной теории Громова–Виттена;
- классическая теория представлений симметрических групп;
- сложившаяся в последние десятилетия двадцатого века теория интегрируемых систем дифференциальных уравнений в частных производных и близкая к ней теория интегрирования по пространствам матриц;
- теория пересечений на пространствах модулей алгебраических кривых.

В дальнейшем переплетение всех этих направлений становится все более тесным, хотя структура теории еще далека от полного понимания. В тот же ряд влетают и совсем свежие исследования, например, связанные с топологической рекурсией и с полиномиальными инвариантами графов. Всем этим вопросам и будет посвящен наш специальный курс. Его цель — свести воедино множество разнообразных результатов, относящихся к излагаемому кругу вопросов, прояснить имеющиеся между ними связи, привести

используемые базисные утверждения, а также сформулировать требующие прояснения задачи.

Теорема Окунькова имеет целый ряд предшественников, среди которых результаты Казакова, Костова и Мигдала. Однако ее формулировка существенно проще тех, которые появлялись в предыдущих работах; она использует лишь базовые понятия теории симметрических групп, изучаемые на первых курсах университетов.

Мы начнем с изучения теоремы Окунькова, постепенно осваивая все используемые в ее формулировке понятия и разбирая ее возможные доказательства. Если пользоваться сведениями, известными на момент появления работы Окунькова, то эта теорема, как и ее доказательство, носят чисто комбинаторный характер. Однако сведение возникающих задач к чисто комбинаторным требует владения целым рядом сведений из алгебры, топологии и теории уравнений в частных производных, которые мы и будем последовательно излагать.

Теорема Окунькова допускает специализацию на случай простых чисел Гурвица. Такая специализация несколько упрощает формулировку теоремы и способы работы с ней, не меняя принципиально ни ее сути, ни ее доказательства. Поэтому отправной точкой для нас послужит именно эта специализация.

# Глава 1

## Перестановки и их разложения в произведение транспозиций и перестановок другого вида

### 1.1 Простые числа Гурвица

Простые числа Гурвица допускают различные определения которые нам еще предстоит обсуждать. Здесь же мы воспользуемся простейшим, которое предложил сам Гурвиц в 90-х годах 19-го столетия. Он ввел эти числа, изучая голоморфные отображения римановых поверхностей, однако мы пока отложим обсуждение этих отображений.

Пусть  $S_n$  — симметрическая группа порядка  $n$ , т.е. группа перестановок  $n$  элементов. *Транспозицией* в  $S_n$  называется перестановка двух переставляемых элементов, оставляющая все остальные элементы на месте.

Всякую перестановку  $\sigma \in S_n$  можно разложить в произведение транспозиций, причем таких разложений существует много. Мы хотим для данного  $m$  подсчитать количество последовательностей  $\tau_1, \dots, \tau_m$  из  $m$  транспозиций, произведение которых равно данной перестановке  $\sigma$ ,

$$\sigma = \tau_m \circ \dots \circ \tau_1.$$

Следующие утверждения очевидны:

- число таких представлений зависит лишь от циклического типа перестановки  $\sigma$  — оно одинаково для всех перестановок с данным циклическим типом;
- есть минимальное число  $m_{\min} = m_{\min}(\sigma)$ , для которого такое представление существует, и это минимальное число равно  $n - c(\sigma)$ , где  $c(\sigma)$

— количество независимых циклов в  $\sigma$ . Действительно, минимальное число транспозиций, произведение которых является циклом длины  $l$  равно  $l - 1$ ;

- все значения  $m$ , для которых число представлений отлично от нуля, имеют одну и ту же четность, совпадающую с четностью перестановки  $\sigma$ .

Теперь мы готовы дать определение простого числа Гурвица. Ниже мы обозначаем разбиения одним из двух эквивалентных способов — либо как последовательность невозрастающих частей,  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ , где  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots$ , в которой лишь конечное число частей отлично от нуля, либо в мультипликативной записи  $1^{k_1} 2^{k_2} \dots$ , где  $k_i$  обозначает кратность части  $i$  в разбиении и все кратности за исключением конечного числа равны 0 (а соответствующие им части не включаются в обозначение). В частности, справедливо равенство  $n = 1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + \dots + n \cdot k_n$ . Вот, например, как записываются в этом виде все разбиения числа 5:

$$5^1, 1^1 4^1, 2^1 3^1, 1^2 3^1, 1^1 2^2, 1^3 2^1, 1^5.$$

**Определение 1.1.1.** Пусть  $\mu$  — разбиение числа  $n$ ,  $\mu \vdash n$ . Простое число Гурвица  $h_{m;\mu}^\circ$  определяется равенством

$$h_{m;\mu}^\circ = \frac{1}{n!} |\{(\tau_1, \dots, \tau_m), \tau_i \in C_2(S_n) \mid \tau_m \circ \dots \circ \tau_1 \in C_\mu(S_n)\}|.$$

Здесь через  $C_2(S_n)$  обозначено множество всех транспозиций в  $S_n$ , а  $C_\mu(S_n)$  — множество всех перестановок с циклическим типом  $\mu \vdash n$  в  $S_n$ ; в частности,  $C_2(S_n) = C_{1^{n-2} 2^1}(S_n)$ .

Связное простое число Гурвица  $h_{m;\mu}$  определяется аналогичным образом, но рассматриваются только такие наборы из  $m$  транспозиций, что порождаемая ими подгруппа  $\langle \tau_1, \dots, \tau_m \rangle \subset S_n$  действует на множестве  $N_n = \{1, \dots, n\}$  транзитивно. Это означает, что любой элемент  $i \in N_n$  переходит в любой другой наперед заданный элемент  $j \in N_n$  после применения некоторой цепочки указанных транспозиций.

## 1.2 Теорема Окунькова

Введем две производящие функции для простых чисел Гурвица:

$$H^\circ(u; p_1, p_2, \dots) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu} h_{m;\mu}^\circ p_{\mu_1} p_{\mu_2} \dots \frac{u^m}{m!}; \quad (1.1)$$

$$H(u; p_1, p_2, \dots) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu} h_{m;\mu} p_{\mu_1} p_{\mu_2} \dots \frac{u^m}{m!}, \quad (1.2)$$

где в обоих случаях  $\mu$  пробегает множество всех разбиений всех натуральных чисел.



Как обычно, производящая функция для несвязных объектов является экспонентой производящей функции для связных:

**Теорема 1.2.1.** *Справедливо равенство  $H^\circ = \exp(H)$ .*

Это утверждение позволяет переформулировать утверждения о простых числах Гурвица в терминах связных простых чисел Гурвица и наоборот.

Кое-что про функции Гурвица сказать легко. Например,  $H(0; p_1, \dots) = p_1$ , т.е.  $H^\circ(0; p_1, \dots) = e^{p_1}$ . Действительно, свободный член по  $u$  функций  $H$  и  $H^\circ$  перечисляет разложение перестановки в произведение нулевого числа транспозиций. Такое произведение одно — это тождественная перестановка. Порождаемая тождественной перестановкой группа (которая, разумеется, состоит из одного элемента) действует транзитивно лишь при  $n = 1$ . Однако проводить сколь-нибудь общие вычисления становится затруднительным.

**Теорема 1.2.2.** [29] *Производящая функция  $H^\circ$  является однопараметрическим семейством  $\tau$ -функций для иерархии Кадомцева–Петвиашвили уравнений в частных производных, а производящая функция  $H$  — решением этой иерархии.*

Как мы увидим позднее, теорему Окунькова можно рассматривать как довольно эффективный способ вычисления связных простых чисел Гурвица. На настоящий же момент в ее формулировке для нас интересна следующая связь — если некоторая функция является решением иерархии Кадомцева–Петвиашвили, то ее экспонента называется  $\tau$ -функцией этой иерархии. Определения иерархии Кадомцева–Петвиашвили (ниже — иерархии КП) мы также не даем; приведем однако первое уравнение этой иерархии:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p_2^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial p_1 \partial p_3} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial p_1^2} \right)^2 - \frac{1}{12} \frac{\partial^4 F}{\partial p_1^4}.$$

Утверждение теоремы означает, в частности, что функция  $H$  удовлетворяет этому уравнению при любом значении параметра  $u$ . Характерной чертой этого уравнения — как и всех прочих уравнений иерархии КП — является его нелинейность: наличие члена  $\left( \frac{\partial^2 F}{\partial p_1^2} \right)^2$  не позволяет решать это уравнение стандартными методами теории линейных уравнений в частных производных. Как и каждое нелинейное уравнение, уравнение КП требует изобретения нестандартных подходов к своему решению.

## 1.3 Графы и перестановки

Рассмотрим произвольный граф с  $n$  вершинами и занумеруем его вершины числами от 1 до  $n$ . Тогда каждому ребру этого графа можно сопоставить транспозицию — элемент группы перестановок  $\mathcal{S}_n$ . Эта транспозиция переставляет элементы, стоящие на концах выбранного ребра, оставляя остальные элементы на месте.

Нас будет интересовать произведение в группе  $\mathcal{S}_n$  транспозиций, отвечающих всем ребрам графа. Поскольку группа перестановок некоммутативна, произведение транспозиций зависит от порядка, в котором мы их берем. Чтобы задать этот порядок, необходимо в дополнение к нумерации вершин перенумеровать ребра графа. Например, для дерева с рис. 1.1 с занумерованными вершинами и ребрами произведение транспозиций

$$\tau_8 \circ \dots \circ \tau_1 = (45)(15)(18)(12)(16)(29)(57)(35)$$

равно (697532148) т.е. является длинным циклом (циклом длины  $n = 9$ ) в группе перестановок  $\mathcal{S}_9$ :

$$1 \mapsto 6 \mapsto 2 \mapsto 9 \mapsto 8 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 3 \mapsto 7 \mapsto 1$$

(мы перемножаем перестановки справа налево, т.е. первой выполняется самая правая перестановка). Оказывается, это общее свойство деревьев.

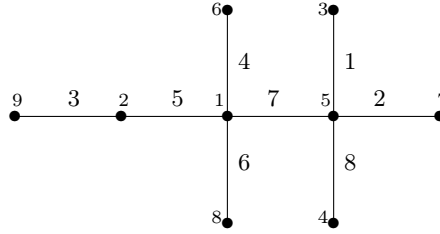


Рис. 1.1: Дерево с помеченными вершинами и занумерованными ребрами

**Теорема 1.3.1.** Пусть  $\Theta$  — дерево на  $n$  вершинах с произвольной нумерацией вершин и ребер. Тогда произведение  $\tau_{n-1} \circ \dots \circ \tau_1$  всех транспозиций, отвечающих ребрам дерева  $\Theta$ , в порядке их нумерации является длинным циклом в группе перестановок  $\mathcal{S}_n$ .

Прежде, чем доказывать теорему, отметим, что если ее утверждение справедливо при выбранной нумерации вершин дерева, то оно остается верным и при любой другой нумерации: перенумерация элементов множества  $N_n = \{1, \dots, n\}$  действует на любой перестановке этого множества сопряжением, а значит не меняет ее циклический тип.

**Доказательство.** Пусть  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  — произвольная перестановка, а  $\tau = (i, j) \in \mathcal{S}_n$  — транспозиция, меняющая местами элементы  $i, j \in N_n$ . Количество циклов в разложении произведения  $\tau \circ \sigma = (i, j) \circ \sigma$  в произведение независимых циклов зависит от того, входят ли элементы  $i$  и  $j$  в один цикл перестановки  $\sigma$  или они входят в разные циклы. Если  $i$  и  $j$  входят в один цикл, то умножение на  $\tau$  расщепляет этот цикл на два. Если же  $i$  и  $j$  принадлежат разным циклам, то умножение на  $\tau$  склеивает эти два цикла в один.

Рассмотрим начальный отрезок  $\tau_k \circ \dots \circ \tau_2 \circ \tau_1$  произведения транспозиций, отвечающий первым  $k$  ребрам дерева. Пусть  $\Theta_k$  — подграф в дереве  $\Theta$ ,

состоящий из всех вершин этого дерева и ребер с номерами  $1, \dots, k$ . Приведенное рассуждение показывает, что циклы в разложении перестановки  $\tau_k \circ \dots \circ \tau_2 \circ \tau_1$  в произведение независимых циклов взаимно однозначно соответствуют компонентам связности графа  $\Theta_k$  — вершины каждой компоненты связности образуют один цикл. Добавление ребра с номером  $k+1$  приводит к тому, что два цикла, отвечающие компонентам связности, соединяемым этим ребром, склеиваются в один. При исчерпании всех ребер все компоненты склеиваются в одну компоненту связности, а циклы — в один длинный цикл. Теорема доказана.  $\square$

*Пример 1.3.2.* Посмотрим, как выглядит процесс соединения подграфов для дерева с рис. 1.1. Сначала каждая вершина образует отдельный цикл — неподвижную точку тождественной перестановки. При умножении на  $\tau_1$  мы получаем цикл длины два, состоящий из вершин 3 и 5. При умножении на  $\tau_2$  к этим двум вершинам добавляется вершина 7 — получается цикл длины три. Умножение на  $\tau_3$  приводит к появлению нового цикла длины два, состоящего из вершин 2 и 9. Умножение на  $\tau_4$  образует еще один цикл длины два — он состоит из элементов 1 и 6. После умножения на  $\tau_5$  последние два цикла сливаются в один цикл длины четыре. Последующее умножение на  $\tau_6$  добавляет в этот цикл элемент 8. Умножение на  $\tau_7$  сливает циклы длины три и пять в один цикл длины восемь; наконец, умножение на  $\tau_8$  добавляет к этому циклу последнюю оставшуюся изолированную вершину с номером 4.

Число  $n-1$  это минимальное число транспозиций, в произведение которых можно разложить цикл длины  $n$  (если в графе с  $n$  вершинами меньше  $n-1$  ребер, то он несвязен). Каждому разложению длинного цикла в  $\mathcal{S}_n$  в произведение  $n-1$  транспозиций можно сопоставить дерево на  $n$  вершинах с занумерованными вершинами и ребрами — ребро с номером  $k$  соединяет вершины с номерами, переставляемыми транспозицией  $\tau_k$ . Этот граф действительно является деревом, поскольку число ребер в нем на единицу меньше числа вершин и он связан. Тем самым, мы установили взаимно-однозначное соответствие между деревьями на  $n$  вершинах с занумерованными вершинами и ребрами и разложениями длинных циклов в  $\mathcal{S}_n$  в произведение  $n-1$  транспозиций.

Согласно теореме Кэли, число деревьев на  $n$  вершинах с занумерованными вершинами равно  $n^{n-2}$ . Есть  $(n-1)!$  различных нумераций ребер такого дерева. Поэтому имеется  $(n-1)!n^{n-2}$  последовательностей из  $n-1$  транспозиций в  $\mathcal{S}_n$ , произведение которых дает длинный цикл. В свою очередь, число длинных циклов в  $\mathcal{S}_n$  равно  $(n-1)!$ , что приводит к следующему утверждению.

**Теорема 1.3.3.** *Каждый длинный цикл в  $\mathcal{S}_n$  допускает  $n^{n-2}$  различных представлений в виде произведения  $n-1$  транспозиций.*

## 1.4 Числа Гурвица

Приведенное в предыдущем параграфе вычисление является первым примером вычисления чисел Гурвица. Более общим образом, числа Гурвица подсчитывают количество разложений данной перестановки в произведение заданного количества перестановок предписанных циклических типов. В этом параграфе мы обсудим различные варианты чисел Гурвица.

### 1.4.1 Простые и общие числа Гурвица

Как мы знаем, любому набору транспозиций можно сопоставить граф с множеством вершин  $N_n$  и занумерованными ребрами. Простые числа Гурвица перечисляют графы с  $m$  ребрами и заданным циклическим типом произведения транспозиций, а связанные простые числа Гурвица — связанные графы.

Выполненное нами в предыдущем разделе вычисление показывает, что

$$h_{n-1;n^1} = n^{n-3}.$$

Действительно, число упорядоченных наборов из  $n - 1$  транспозиций, произведение которых есть длинный цикл, совпадает с числом деревьев на  $n$  вершинах с помеченными вершинами и ребрами, т.е. равно  $(n - 1)!n^{n-2}$ . После деления на  $n!$  мы получаем требуемое число Гурвица.

Приведем примеры вычисления чисел Гурвица “вручную”.

*Пример 1.4.1.* Пусть  $n = 3$  и  $\mu = 3^1$ . Произведение любых двух различных транспозиций в  $\mathcal{S}_3$  дает цикл длины 3, а подгруппа, ими порожденная, совпадает с  $\mathcal{S}_3$  и поэтому действует на множестве  $N_3$  транзитивно. Поэтому

$$h_{2;3^1}^\circ = h_{2;3^1} = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1,$$

поскольку всего есть  $3 \cdot 2 = 6$  упорядоченных пар различных транспозиций. Это частный случай — для  $n = 3$  — нумерации помеченных деревьев.

Отметим, что если как простое число Гурвица, так и соответствующее связанное простое число Гурвица отличны от нуля, то они совпадают в том и только в том случае, если перестановка  $\sigma$  представляет собой длинный цикл: в этом случае подгруппа группы перестановок, порожденная транспозициями  $\tau_i$ , автоматически действует транзитивно, а во всех остальных случаях это не так.

С ростом порядка симметрической группы и сложности разбиения прямые вычисления чисел Гурвица становятся все более сложными.

*Пример 1.4.2.* Пусть  $n = 3$  и пусть  $\mu = 1^1 2^1$  — циклический тип транспозиции. Разумеется, транспозицию можно представить как единственную транспозицию. Однако она допускает и представление в виде произведения трех транспозиций. Более того, произведение любой тройки транспозиций является нечетной перестановкой, а значит, транспозицией. Поэтому

$$h_{3;1^1 2^1}^\circ = \frac{1}{6} \cdot 3^3 = \frac{9}{2}.$$

Среди  $3^3 = 27$  троек транспозиций 3 тройки порождают подгруппы, действующие нетранзитивно (это подгруппы, состоящие из троек совпадающих транспозиций). Таким образом,

$$h_{3;1^1 2^1} = \frac{1}{6} \cdot (27 - 3) = 4.$$

Этот пример показывает, что числа Гурвица могут быть и дробными. Так оказывается даже в простейшем случае

$$h_{1;2^1}^\circ = h_{1;2^1} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

*Пример 1.4.3.* Полезным инструментом вычисления простых чисел Гурвица могут служить ориентированные графы. Посмотрим, как с помощью такого графа можно подсчитать число  $h_{4;1^2 3^1}^\circ$ . Это число отвечает произведению четырех транспозиций в группе  $S_5$ , произведение которых является циклом длины 3. На рис. 1.2 изображен ориентированный граф, позволяющий вычислить это число. Стрелки в этом графе идут слева направо, и каждая стрелка означает умножение на транспозицию. Вершины графа — разбиения числа  $n = 5$ . Над каждой стрелкой надписана ее кратность. Кратность представляет собой число транспозиций, умножение на которые данной перестановки, цикловой тип которой совпадает с разбиением в начале стрелки, дает перестановку, цикловой тип которой совпадает с разбиением в конце стрелки. Обратите внимание на то, что сумма кратностей всех ребер, выходящих из одной вершины, равна 10 — это общее количество транспозиций в группе перестановок пяти элементов.

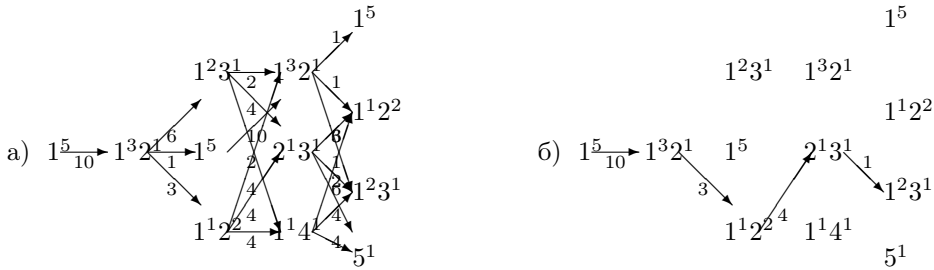


Рис. 1.2: а) Ориентированный граф для подсчета числа  $h_{4;1^2 3^1}^\circ$  и б) один из путей в нем; кратность выбранного пути равна 120

Например, на стрелке, идущей из вершины  $1^2 3^1$  в вершину  $1^1 4^1$ , написано 6: умножение перестановки циклового типа  $1^2 3^1$  на транспозицию оказывается перестановкой циклового типа  $1^1 4^1$  для 6 различных транспозиций. Действительно, такая транспозиция должна переставлять один из неподвижных элементов исходной перестановки (таких элементов 2) и один из элементов цикла длины 3 (таких элементов 3).

Интересующее нас число Гурвица есть  $1/5!$  умножить на суммарное количество путей длины 4, ведущих из исходной вершины  $1^5$  в вершину  $1^23^1$ . Каждый путь считается с кратностью, равной произведению кратностей всех входящих в него ребер. Это число равно

$$h_{4;1^23^1}^\circ = \frac{1}{5!} \cdot 10 \cdot (6 \cdot 6 \cdot 4 + 6 \cdot 1 \cdot 1 + 6 \cdot 3 \cdot 6 + 1 \cdot 10 \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 4) = 34 \frac{1}{2}.$$

Подсчет связного числа Гурвица  $h_{4;1^23^1}$  требует более тонкого анализа путей в графе — мы должны отобрать те из них, которые порождают транзитивно действующую подгруппу — и используемые нами здесь графы не слишком полезны с этой точки зрения. Для этой цели больше подходят тропические графы, которые мы описываем в следующем параграфе.

Более общим образом, для набора разбиений  $\mu_1, \dots, \mu_m$  числа  $n$  мы можем рассмотреть общие числа Гурвица, перечисляющие разложения тождественной перестановки в произведении вида

$$\sigma_m \circ \dots \circ \sigma_1,$$

в которых каждая перестановка  $\sigma_i$  имеет циклический тип  $\mu_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . (В случае простых чисел Гурвица все перестановки за исключением одной являются транспозициями, а последняя равна  $\sigma^{-1}$  и имеет тот же циклический тип, что и  $\sigma$ ). *Общее число Гурвица* определяется как число наборов из  $m$  перестановок  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  данных циклических типов, поделенное на  $n!$ . *Связные числа Гурвица* определяются аналогичным образом с добавлением требования транзитивности действия подгруппы  $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_m \rangle \subset S_n$ , порожденной перестановками  $\sigma_i$ . Мы не собираемся использовать общие числа Гурвица, поэтому не вводим обозначений для них.

### 1.4.2 Тропическое вычисление простых чисел Гурвица

Тропическое вычисление представляет собой другой способ подсчета чисел Гурвица. Его можно эффективно использовать для подсчета не только простых, но и двойных чисел Гурвица, в том числе, связных. На рис. 1.3 изображен пример вычисления простого связного числа Гурвица  $h_{4;1^23^1}$ . Левая граница каждой из диаграмм соответствует тождественной перестановке: эта перестановка имеет 4 непересекающихся цикла, причем длина каждого из циклов равна 1. Умножение перестановки на транспозицию приводит либо к склейке двух непересекающихся циклов в один, либо расщеплению одного цикла на два; такой операции соответствует вершина графа валентности 3. Ребра графа отвечают циклам перестановки; если длина цикла превышает единицу, то она написана над ребром (у конечной перестановки написаны и длины циклов, равные 1; они заключены в скобки).

Приведенные 5 тропических графов исчерпывают все связные графы, отвечающие последовательности из четырех транспозиций 4-элементного множества. На рисунке указаны порядки групп автоморфизмов каждого графа и его вклад в число Гурвица.

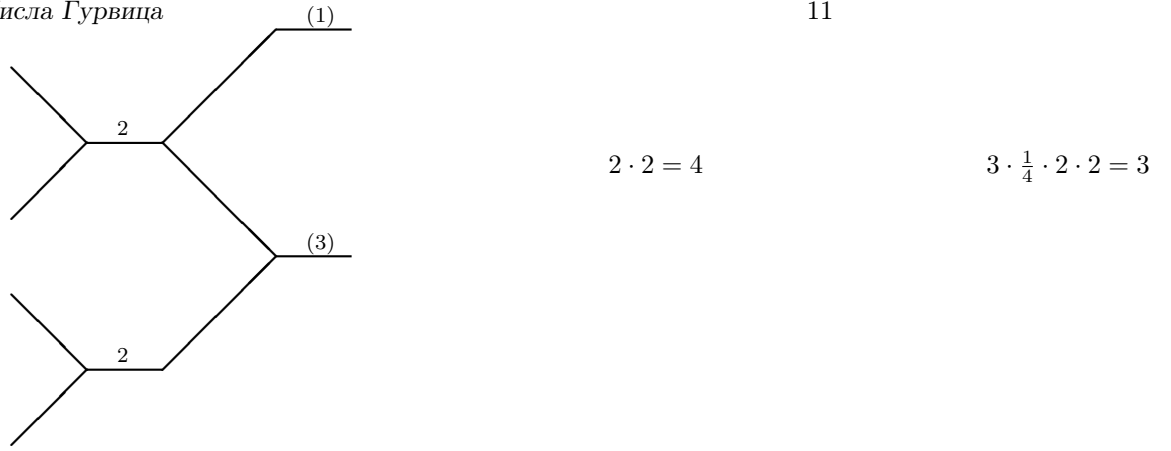


Рис. 1.3: Вычисление связного простого числа Гурвица  $h_{4;1^3 1}$ . Над ребрами графа, отвечающими циклу длины большей 1, указана эта длина. В скобки заключены длины орбит конечной перестановки

### 1.4.3 Формула Гурвица

В 1891 году А. Гурвиц предложил формулу, обобщающую формулу Кэли для простых чисел Гурвица, подсчитывающих разложения цикла длины  $n$  в произведение  $n - 1$  транспозиций. Формула Гурвица подсчитывает разложения перестановки произвольного наперед заданного циклического типа в произведение минимального числа транспозиций, обеспечивающего транзитивное действие порожденной ими группы перестановок.

Пусть  $\nu = (n_1, n_2, \dots) \vdash n$  — разбиение числа  $n$ . Минимальное количество транспозиций, произведение которых может иметь циклический тип  $\nu$ , равно  $n - \ell(\nu)$ , где  $\ell(\nu)$  — число частей в разбиении  $\nu$ . Действительно, для получения независимого цикла длины  $n_i$  требуется по крайней мере  $n_i - 1$  транспозиция. Однако если  $\ell(\nu) > 1$ , то любой набор из  $n - \ell(\nu)$  транспозиций будет определять несвязный граф (в связном графе на  $n$  вершинах должно быть не меньше  $n - 1$  ребер).

Количество же транспозиций, необходимое для получения связного графа, должно равняться  $n - 2 + \ell(\nu)$ :  $n - 1$  транспозиций необходимо для получения одной компоненты связности, и еще  $\ell(\nu) - 1$  транспозиций для расщепления этой компоненты на  $\ell(\nu)$  частей. Обратите внимание на то, что в этом вычислении сами длины циклов не участвуют — важно лишь их количество.

Следующее утверждение дает количество связных разложений перестановки данного циклического  $\nu = (n_1, n_2, \dots) \vdash n$  типа в произведение минимально возможного числа  $n - 2 + \ell(\nu)$  транспозиций:

**Теорема 1.4.4** (Hurwitz, 1893). *Имеет место равенство*

$$h_{n-2+\ell(\nu); \nu} = \frac{(n-2+\ell(\nu))!}{n!} \prod_{i=1}^{\ell(\nu)} \frac{n_i^{n_i}}{n_i!} n^{\ell(\nu)-3}. \quad (1.3)$$

Формула Кэли  $h_{n-1;n^1} = n^{n-3}$  является очевидным частным случаем этого утверждения, а, скажем, при  $\ell(\nu) = 2$ , т.е.  $\nu = (n_1, n_2)$ , оно принимает вид

$$h_{n_1+n_2;\nu} = \prod_{i=1}^{\ell(\nu)} \frac{1}{n_1+n_2} \frac{n_1^{n_1}}{n_1!} \frac{n_2^{n_2}}{n_2!}.$$

Содержащееся в работе Гурвица доказательство было неполным, и в конце XX-го века было предпринято несколько попыток его восстановления. Однако они не привели к прозрачному комбинаторному рассуждению. В свою очередь, известное изящное геометрическое рассуждение выходит за рамки нашего курса. Как следствие, мы оставим формулу Гурвица (1.4.4) без доказательства, однако позволим себе на нее при необходимости ссылаться.

## 1.5 Уравнение транспозиции

Следующая теорема дает простой способ вычисления чисел Гурвица, отталкиваясь от этих начальных условий.

**Теорема 1.5.1** (уравнение транспозиции, Гульден–Джексон). *Производящая функция  $H^\circ$  для простых чисел Гурвица удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:*

$$\frac{\partial H^\circ}{\partial u} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i+j=n} \left( (i+j)p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + ij p_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \right) H^\circ. \quad (1.4)$$

Прежде чем доказывать теорему, посмотрим, как вычислять производящую функцию  $H^\circ$  с помощью уравнения транспозиции. Один из удобных способов смотреть на функцию  $H^\circ$  состоит в том, чтобы разложить ее в ряд по переменной  $u$ ,

$$H^\circ(u; p_1, p_2, \dots) = \sum_{m=0}^{\infty} H_{(m)}^\circ(p_1, p_2, \dots) \frac{u^m}{m!}.$$

Тогда уравнение транспозиции можно переписать в виде рекурсии

$$H_{(m+1)}^\circ = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i+j=n} \left( (i+j)p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + ij p_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \right) H_{(m)}^\circ = A H_{(m)}^\circ, \quad (1.5)$$

где преобразование  $A$  имеет вид

$$A = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i+j=n} \left( (i+j)p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + ij p_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \right).$$



Начав с функции  $H_{(0)}^\circ = H^\circ(0; p_1, p_2, \dots) = e^{p_1}$ , мы сразу же получаем несколько первых членов разложения:

$$H^\circ(u; p_1, p_2, \dots) = e^{p_1} \left( 1 + \frac{1}{2} p_2 \frac{u}{1!} + (p_1^2 + \frac{1}{2} p_2^2 + p_3) \frac{u^2}{2!} + \dots \right). \quad (1.6)$$

Отметим, что применение оператора  $A$  к функции  $H_{(m)}^\circ$  всегда порождает лишь конечное число ненулевых слагаемых, хотя в операторе их бесконечно много. Причина состоит в том, что функция  $H_{(m)}^\circ$  имеет вид произведения  $e^{p_1}$  на многочлен от переменных  $p_1, \dots, p_m$ , и ее производные по каждой из переменных  $p_k$  при  $k > m$  обращаются в нуль.

**Вывод уравнения транспозиции.** Уравнение описывает, что происходит при умножении данной перестановки на транспозицию, т.е. при замене представления

$$\sigma = \tau_m \circ \tau_{m-1} \circ \dots \circ \tau_1$$

представлением

$$\tau_m \circ \sigma = \tau_{m-1} \circ \dots \circ \tau_1$$

(здесь мы воспользовались тем, что перестановка  $\tau_m^2$  является тождественной). Уменьшение числа транспозиций справа на единицу означает дифференцирование по  $u$  слева в уравнении (1.4), поскольку эта процедура понижает на единицу степень по  $u$ .

Умножение на транспозицию  $\tau_m$  меняет перестановку  $\sigma$  одним из двух различных способов: либо  $\tau_m$  меняет местами два элемента, принадлежащих одному циклу в  $\sigma$ , либо эти два элемента принадлежат различным циклам. В первом случае цикл в  $\sigma$  расщепляется на два цикла, сумма длин которых совпадает с длиной расщепленного цикла. Во втором случае, наоборот, два цикла склеиваются в единый цикл, длина которого равна сумме длин склеивающихся циклов. Два слагаемых справа в уравнении транспозиции соответствуют этим двум возможностям. Коэффициенты в уравнении отвечают количеству способов выбрать два элемента, переставляемые транспозицией  $\tau_m$ : для каждого из  $i + j$  элементов в цикле длины  $i + j$  пару можно подобрать единственным образом (при условии, что циклический порядок фиксирован), а в двух циклах длин  $i$  и  $j$  соответственно имеется  $i \cdot j$  способов выбрать пару элементов, перестановка которых склеивает эти циклы. Теорема доказана.  $\square$

## 1.6 Применение уравнения транспозиции

Уравнение транспозиции позволяет рекуррентно строить члены разложения производящей функции  $H^\circ$  по степеням переменной  $u$ . Положим

$$H^\circ(u; p_1, p_2, \dots) = \sum_{k=0}^{\infty} H_m^\circ(p_1, p_2, \dots) \frac{u^k}{k!}.$$

Нулевой член этого разложения мы уже знаем,  $H^\circ(p_1, p_2, \dots) = e^{p_1}$  (поскольку перемножение пустого множества транспозиций дает тождественную перестановку). Для подсчета первого члена  $H_1^\circ$  воспользуемся уравнением транспозиции. Сравнивая коэффициенты при  $u^0$  в левой и правой части этого уравнения, получаем

$$H_1^\circ = W_2 H_0^\circ = \frac{1}{2} p_2 \frac{\partial^2 H_0^\circ}{\partial p_1^2} = \frac{1}{2} p_2 e^{p_1}.$$

Аналогично, для вычисления производящей функции  $H_2^\circ$  можно сравнить коэффициенты при  $u^1$  в правой и левой частях уравнения транспозиции:

$$H_2^\circ = W_2 H_1^\circ = \frac{1}{2} \left( p_1^2 \frac{\partial H_1^\circ}{\partial p_2} + p_2 \frac{\partial^2 H_1^\circ}{\partial p_1^2} + p_3 \frac{\partial^2 H_1^\circ}{\partial p_1 \partial p_2} \right) = 3(p_1^2 + \frac{1}{2} p_2^2 + p_3) e^{p_1}.$$

Другими словами, уравнение транспозиции эквивалентно следующему рекуррентному соотношению.

**Теорема 1.6.1.** *Имеет место соотношение*

$$H_{n+1}^\circ = W_2 H_n^\circ$$

для  $n = 0, 1, 2, \dots$

**Следствие 1.6.2.** *Функции  $H_n^\circ$  имеют вид*

$$H_n^\circ(p_1, p_2, \dots) = Q_n(p_1, p_2, \dots, p_n) e^{p_1},$$

где  $Q_n(p_1, \dots, p_n)$  — многочлен.

Отметим, что мономы, входящие в многочлен  $Q_n$  с ненулевыми коэффициентами, отвечают циклическим типам перестановок, которые можно получить, перемножая  $n - 1$  транспозиций. При этом переменным  $p_k$  при  $k > 1$  соответствуют циклы длины  $k$ , тогда как степень переменной  $p_1$  равна количеству неподвижных элементов перестановки, затронутых транспозициями (и возвращенным впоследствии на место).

**Задача 1.6.3.** Докажите это утверждение.

## 1.7 Задачи

*Задача 1.7.1.* Пусть  $\Gamma$  — связный граф на  $n$  вершинах с единственным простым циклом. Докажите, что произведение в  $\mathcal{S}_n$  всех транспозиций, соответствующих ребрам графа  $\Gamma$ , раскладывается в произведение двух независимых циклов вне зависимости от порядка умножения транспозиций.

*Задача 1.7.2.* Приведите пример связного графа с единственным простым циклом, в котором длины двух циклов в произведении всех транспозиций, отвечающих его ребрам, зависят от выбранного порядка умножения.

**[Указание:]** В качестве такого графа можно взять цикл с четырьмя вершинами.

*Задача 1.7.3.* Приведите пример связного графа, в котором количество циклов в произведении всех транспозиций, отвечающих его ребрам, зависит от порядка умножения транспозиций.

**[Указание:]** В качестве такого графа можно взять граф на трех вершинах с четырьмя ребрами. Два из этих ребер должны соединять одну и ту же пару вершин.

*Задача 1.7.4.* Воспользовавшись рекуррентным соотношением (1.5), выпишите коэффициенты при  $u^3$  и  $u^4$  в разложении (1.6). Зная эти коэффициенты, выпишите формулы для числа разложений перестановки данного циклического типа в произведение трех и четырех транспозиций.

*Задача 1.7.5.* Вычислите простые и связанные простые числа Гурвица  $h_{3;1^4}^\circ$ ,  $h_{3;1^4}^\circ$ ,  $h_{3;1^2 2^1 3^1}^\circ$ ,  $h_{3;1^2 2^1 3^1}^\circ$ .

*Задача 1.7.6.* Подсчитайте число упорядоченных пар циклов  $\sigma_1, \sigma_2$  длины 3 а) в группе  $\mathcal{S}_4$ , произведение которых  $\sigma_1 \sigma_2$  имеет циклический тип  $2^2$ ; б) в группе  $\mathcal{S}_5$ , произведение которых  $\sigma_1 \sigma_2$  имеет циклический тип  $5^1$ .



## Глава 2

# Представления симметрических групп

Числа Гурвица непосредственно связаны со структурой групповых алгебр симметрических групп. То же самое справедливо и для всех решений иерархии Кадомцева–Петвиашвили. В этой главе мы изложим необходимую в дальнейшем информацию о групповых алгебрах симметрических групп и их представлениях.

### 2.1 Диагонализуемость оператора транспозиции

Оператор  $W_2$  сохраняет квазиоднородную степень монома: результат его применения к моному  $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots$  однородной степени  $m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \dots$  является линейной комбинацией мономов той же однородной степени. Тем самым, оператор  $W_2$  раскладывается в прямую сумму конечномерных операторов, действующих на пространствах квазиоднородных многочленов. Обозначим пространство линейных комбинаций квазиоднородных мономов степени  $n$  от переменных  $p_1, p_2, \dots$  через  $\mathcal{P}_n$ , так что

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 \oplus \dots$$

есть алгебра многочленов.

Для разбиения  $\lambda \vdash n$  обозначим через  $C_\lambda \subset S_n$  класс сопряженности перестановок, имеющих циклический тип  $\lambda$ , и через  $|C_\lambda| = \frac{n!}{\zeta_\lambda}$  количество элементов в этом классе. Здесь

$$\zeta_\lambda = |\text{Aut}(\lambda)| \prod_i \lambda_i$$

это порядок стационарной подгруппы элемента класса  $C_\lambda$ . Введем теперь на

каждом пространстве  $\mathcal{P}_n$  невырожденное скалярное произведение, положив

$$(p_\lambda, p_\mu) = \frac{n!}{|C_\lambda|} \delta_{\lambda\mu}. \quad (2.1)$$

**Теорема 2.1.1.** *Оператор  $W_2 : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$  является самосопряженным относительно скалярного произведения (2.1), т.е.  $(W_2P, Q) = (P, W_2Q)$  для любых квазиоднородных многочленов  $P, Q, \in \mathcal{P}_n$ .*

**Следствие 2.1.2.** *Оператор  $W_2 : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$  имеет вещественные собственные числа и диагонализуем для любого  $n = 0, 1, 2, \dots$*

Для доказательства теоремы достаточно вычислить скалярное произведение  $(W_2p_\lambda, p_\mu)$ . Это произведение отлично от нуля если и только если

- либо в разбиении  $\lambda$  есть две части  $i$  и  $j$ , замена которых их суммой  $i+j$  превращает разбиение  $\lambda$  в разбиение  $\mu$ ,
- либо в разбиении  $\lambda$  есть часть  $i+j$ , замена которой частями  $i$  и  $j$  превращает разбиение  $\lambda$  в разбиение  $\mu$ .

Предположим, что  $i \neq j$ . В первом случае моном  $p_\lambda$  представим в виде  $p_\lambda = p_i^a p_j^b p_{i+j}^c p_{\bar{\lambda}}$ , где  $a > 0, b > 0, c \geq 0$ , моном  $p_{\bar{\lambda}}$  не содержит переменных  $p_i, p_j$  и  $p_{i+j}$  а моном  $p_\mu$  представим в виде  $p_\mu = p_i^{a-1} p_j^{b-1} p_{i+j}^{c+1} p_{\bar{\lambda}}$ . Имеем

$$\begin{aligned} (W_2p_\lambda, p_\mu) &= (ijabp_\mu, p_\mu) = \frac{ijabn!}{i^a j^b a! b! c! \zeta_{\bar{\lambda}}} \\ &= \frac{n!}{i^{a-1} j^{b-1} (i+j)^c (a-1)! (b-1)! \zeta_{\bar{\lambda}}} = \frac{1}{c \zeta_\mu}, \end{aligned}$$

тогда как

$$\begin{aligned} (p_\lambda, W_2p_\mu) &= (p_\lambda, (i+j)cp_\lambda) = \frac{(i+j)cn!}{i^{a-1} j^{b-1} (i+j)^{c+1} \zeta_{\bar{\lambda}}} \\ &= \frac{n!}{i^{a-1} (a-1)! j^{b-1} (b-1)! (i+j)^c \zeta_{\bar{\lambda}}} = \frac{1}{c \zeta_\mu}, \end{aligned}$$

что и доказывает требуемое равенство. То же рассуждение, проведенное в обратном порядке, справедливо в случае расщепления цикла на два цикла различной длины. Для случая  $i = j$  доказательство аналогично.

Оператор  $W_2 : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$  представляет собой запись оператора умножения на класс транспозиций в центре  $Z\mathbb{C}[S_n]$  групповой алгебры симметрической группы  $S_n$  при изоморфизме  $Z\mathbb{C}[S_n] \rightarrow \mathcal{P}_n$ . На самом деле, диагонализуемым оказывается оператор умножения на любой элемент этого центра. К описанию групповой алгебры симметрической группы, ее центра и указанного изоморфизма мы сейчас и переходим. Это описание позволит нам указать диагонализующий базис для оператора  $W_2$  и найти его собственные числа.

## 2.2 Групповая алгебра симметрической группы

Для любой конечной группы  $G$  определена ее *групповая алгебра*  $\mathbb{C}[G]$  — векторное пространство, состоящее из линейных комбинаций элементов группы с коэффициентами из  $\mathbb{C}$ . Две таких линейных комбинации умножаются по правилу умножения элементов группы,

$$\sum_{g \in G} a_g g \sum_{h \in G} b_h h = \sum_{g, h \in G} a_g b_h (gh).$$

В частности, если группа  $G$  некоммутативна, то и ее групповая алгебра  $\mathbb{C}[G]$  некоммутативна.

*Сопряженность* является отношением эквивалентности на группе  $G$ : два элемента  $g_1, g_2 \in G$  сопряжены между собой, если существует элемент  $h \in G$ , такой, что  $g_2 = h^{-1}g_1h$ . Это отношение эквивалентности разбивает группу  $G$  на непересекающиеся подмножества — *классы сопряженности*, состоящие из попарно сопряженных элементов. Такому классу сопряженности мы сопоставим элемент групповой алгебры, представляющий собой сумму всех элементов класса, взятых с коэффициентом 1; этот элемент групповой алгебры мы также будем называть классом сопряженности.

*Центр*  $Z\mathbb{C}[G]$  групповой алгебры  $\mathbb{C}[G]$  состоит из тех ее элементов, которые коммутируют со всеми ее элементами. Центр представляет собой векторное подпространство в  $\mathbb{C}[G]$ , натянутое на классы сопряженности группы  $G$ , и является коммутативной подалгеброй в  $\mathbb{C}[G]$ . В случае, когда  $G$  — симметрическая группа  $S_n$ , класс сопряженности перестановки определяется ее циклическим типом. Как следствие, центр  $Z\mathbb{C}[S_n]$  групповой алгебры симметрической группы порожден элементами  $C_\lambda$ , отвечающим разбиениям  $\lambda \vdash n$  числа  $n$ . Такой элемент групповой алгебры представляет собой сумму всех перестановок с циклическим типом  $\lambda$ . Так, класс  $C_{1^{n-2}2^1} \in \mathbb{C}[S_n]$  это сумма всех транспозиций.

Поскольку центр групповой алгебры  $Z\mathbb{C}[S_n]$  порожден элементами  $C_\lambda$ , произведение любых двух таких элементов представляет собой линейную комбинацию элементов такого же вида. Например,

$$(C_{1^2 2^1})^2 = 3C_{1^4} + 2C_{2^2} + 6C_{1^3 1}.$$

Простое число Гурвица  $h_{m;\nu}$  это не что иное как подходящим образом отшкалированный коэффициент при слагаемом  $C_\nu$  в  $m$ -й степени элемента  $C_{1^{n-2}2^1}$ :

$$(C_{1^{n-2}2^1})^m = n! \sum_{\nu \vdash n} h_{m;\nu} \frac{C_\nu}{|C_\nu|}.$$

Действительно, мономы в разложении левой части равенства перечисляют всевозможные произведения из  $m$  транспозиций, а вклад в коэффициент при  $C_\nu$  дают только те произведения, которые имеют циклический тип  $\nu$ .

Сопоставим всякому элементу центра  $Z\mathbb{C}[S_n]$  моном от переменных  $p_i$  по правилу

$$C_\nu \mapsto |C_\nu| p_\nu. \quad (2.2)$$

Это соответствие задает линейный изоморфизм центра групповой алгебры  $Z\mathbb{C}[S_n]$  с пространством  $\mathcal{P}_n$  многочленов квазиоднородной степени  $n$ . Мы получаем в качестве следствия

**Утверждение 2.2.1.** *При изоморфизме (2.2) оператор умножения на сумму транспозиций  $C_{1^n-2_2^1}$  отождествляется с оператором транспозиции  $W_2$ , а элемент*

$$\frac{1}{n!} \exp(uC_{1^n-2_2^1}) = \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} (C_{1^n-2_2^1})^m \frac{u^m}{m!}$$

— со слагаемым квазиоднородной степени  $n$  в производящем ряду  $H^\circ$  для несвязных простых чисел Гурвица.

Введем скалярное произведение в  $\mathbb{C}[S_n]$ , полагая

$$(\sigma_1, \sigma_2) = \begin{cases} n! & \text{если перестановки } \sigma_1, \sigma_2 \text{ взаимнообратны,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2.3)$$

При ограничении этого скалярного произведения на центр  $Z\mathbb{C}[S_n]$  классы сопряженности  $C_\lambda$  становятся ортогональным базисом в  $Z\mathbb{C}[S_n]$  с нормировкой  $(C_\lambda, C_\lambda) = n!|C_\lambda|$ . Отображение (2.2) сохраняет скалярное умножение.

Еще один ортогональный — и, более того, ортонормированный, — базис в  $Z\mathbb{C}[S_n]$  образован характерами  $\chi_\lambda$  неприводимых представлений симметрической группы. Пусть  $\rho : S_n \rightarrow \text{GL}(V)$  — представление группы  $S_n$  линейными преобразованиями векторного пространства  $V$ . Представлению  $\rho$  можно сопоставить его *характер*, т.е. отображение  $\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$ , переводящее перестановку  $g \in S_n$  в след элемента  $\rho(g)$ ,  $\chi_\rho : g \mapsto \text{tr}(\rho(g))$ . Представление  $\rho$  называется *неприводимым*, если его нельзя разложить в прямую сумму представлений. Неприводимые представления симметрической группы  $S_n$  перечисляются разбиениями  $\lambda$  числа  $n$ ; соответствующие им характеры обозначаются  $\chi_\lambda$ .

**Задача 2.2.2.** Докажите, что характер прямой суммы представлений является суммой характеров слагаемых.

Каждой функции  $f : S_n \rightarrow \mathbb{C}$  можно сопоставить элемент

$$f^* = n! \sum_{g \in S_n} f(g^{-1})g \in \mathbb{C}[S_n]$$

групповой алгебры симметрической группы. Таким образом устанавливается изоморфизм между групповой алгеброй  $\mathbb{C}[S_n]$  и пространством функций  $\{S_n \rightarrow \mathbb{C}\}$ . Характер всякого представления постоянен на каждом классе сопряженности элементов группы. Поэтому для всякого характера  $\chi_\lambda$  сопоставляемый ему элемент  $\chi_\lambda^*$  является линейной комбинацией элементов  $C_\lambda$ , а значит лежит в центре групповой алгебры.



Скалярное произведение (2.2) в пространстве функций на группе  $S_n$  принимает вид

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} f_1(g) f_2(g^{-1}).$$

Вот еще одна удобная интерпретация введенного скалярного произведения. *Регулярным представлением*  $R : S_n \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}[S_n])$  называется представление симметрической группы в ее групповой алгебре, на которой она действует умножением слева. Отсюда следует следующая удобная формула для скалярного произведения

$$(\sigma_1, \sigma_2) = \text{tr}_R(\sigma_1 \sigma_2).$$

Действительно, в базисе из перестановок в  $\mathbb{C}[S_n]$  матрица умножения на всякую перестановку, отличную от единичной, не имеет ненулевых элементов на главной диагонали, и значит ее след равен нулю. Поэтому след  $\text{tr}_R(\sigma_1 \sigma_2)$  равен коэффициенту при единичной перестановке, умноженному на след единичной матрицы, т.е.  $n!$ , что равно скалярному произведению  $(\sigma_1, \sigma_2)$ .

Известно, что всякое неприводимое представление встречается в регулярном в качестве прямого слагаемого. Более того, кратность вхождения неприводимого представления  $\lambda$  равна его размерности  $\dim_\lambda$ . Отсюда мы получаем равенство

$$(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{\lambda \vdash n} \dim_\lambda \chi_\lambda(\sigma_1 \sigma_2).$$

Размерность представления  $\lambda$  можно выразить в виде  $\dim_\lambda = \chi_\lambda(\text{id})$  — следу единичного элемента группы в представлении  $\lambda$ . Отметим, что для размерностей неприводимых представлений симметрической группы имеет место *формула крюков*:

$$\dim_\lambda = \frac{n!}{\prod_{w \in \lambda} \text{hook}(w)}.$$

Здесь параметр  $w$  пробегает все клетки диаграммы Юнга, отвечающей разбиению  $\lambda$ , а  $\text{hook}(w)$  это длина *крюка* клетки  $w$ , т.е. суммарное количество клеток правее клетки  $w$  в той же строке и клеток ниже  $w$  в том же столбце, включая саму клетку  $w$ . В частности, два одномерных неприводимых представления, тривиальное и знаковое, соответствуют разбиениям  $n^1$  и  $1^n$ .

Всякий элемент из центра действует в неприводимом представлении скалярным оператором. Из равенства

$$(\chi_\lambda^*, g) = \chi_\lambda(g)$$

для любого  $g \in S^n$  мы заключаем, что элемент  $\chi_\lambda^*$  действует умножением на скаляр  $\frac{1}{\dim_\lambda}$  в неприводимом представлении  $\lambda$  и тривиально в остальных. Отсюда вытекает упомянутое выше утверждение, что элементы  $\chi_\lambda^*$  образуют ортонормированный базис в  $Z\mathbb{C}[S_n]$ .

Кроме того, характеры неприводимых представлений являются идемпотентами:

$$\begin{aligned}\chi_\lambda^* \chi_\lambda &= \frac{1}{\dim_\lambda} \chi_\lambda^*, \\ \chi_\lambda^* \chi_\mu &= 0 \text{ при } \mu \neq \lambda.\end{aligned}$$

Как следствие, в базисе, образованном характерами неприводимых представлений, умножение в центре групповой алгебре сильно упрощается: этот центр состоит из диагональных матриц. Все приведенные утверждения мы суммируем в следующем предложении

**Утверждение 2.2.3.** *Элементы  $\chi_\lambda^*$  являются собственными для оператора умножения на всякий элемент из центра  $Z\mathbb{C}[S_n]$ . Соответствующее собственное значение равно собственному значению действия этого оператора в неприводимом представлении  $\lambda$ .*

## 2.3 Многочлены Шура

Поскольку умножения на элементы центра групповой алгебры, рассматриваемые как линейные операторы на этом пространстве, являются самосопряженными и коммутируют между собой, у них имеется общий собственный базис. Этот собственный базис определяется однозначно с точностью до перестановки его элементов и умножения их на ненулевые множители. В частности, этот базис является и собственным базисом для оператора умножения на класс  $C_{1^{n-2}1}$ . Из обсуждения предыдущего пункта вытекает, что в качестве такого базиса можно взять образ базиса, образованного неприводимыми характерами при указанном выше изоморфизме  $Z\mathbb{C}[S_n] \rightarrow \mathcal{P}_n$ .

*Многочленом Шура  $s_\lambda(p_1, p_2, \dots) \in \mathcal{P}_n$ ,  $\lambda \vdash n$ , называется образ неприводимого характера  $\chi_\lambda^* \in Z\mathbb{C}[S_n]$  при изоморфизме (2.2)  $Z\mathbb{C}[S_n] \rightarrow \mathcal{P}_n$ .*

Играя фундаментальную роль в теории представлений симметрических групп и общих линейных групп Ли, многочлены Шура имеют множество различных эквивалентных определений, из которых мы приведем лишь небольшую часть. Наряду с многочленами от переменных  $p_1, p_2, \dots$ , нам будет также удобно рассматривать симметрические функции от бесконечного (или конечного, но достаточно большого) числа переменных  $x_1, x_2, \dots$  (Функция называется *симметрической*, если она не меняется ни при какой перестановке переменных.) Будем обозначать алгебру таких функций с коэффициентами из  $\mathbb{C}$  через  $\mathcal{S} = \mathbb{C}^{\mathcal{S}}[x_1, x_2, \dots]$ . Эта алгебра градуирована,  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \oplus \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2 \oplus \dots$ , где через  $\mathcal{S}_n$  обозначено векторное пространство симметрических многочленов степени  $n$ . Отображение  $\mathbb{C}[p_1, p_2, \dots] \rightarrow \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$ , переводящее переменную  $p_n$  в степенную сумму  $x_1^n + x_2^n + \dots$ , осуществляет изоморфизм градуированных алгебр  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{S}$ . В частности, и многочлены Шура можно представлять либо как однородные симметрические многочлены от переменных  $x_1, x_2, \dots$ , либо как квазиоднородные многочлены от переменных  $p_1, p_2, \dots$ .

Пусть  $\lambda \vdash n$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ ,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ , — разбиение. Определим симметрический многочлен Шура  $S_\lambda$  в переменных  $x_1, x_2, \dots$  следующим образом:

$$S_\lambda(x_1, x_2, \dots) = \frac{\begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+n-1} & x_2^{\lambda_2+n-1} & \dots \\ x_1^{\lambda_1+n-2} & x_2^{\lambda_2+n-2} & \dots \\ x_1^{\lambda_1+n-3} & x_2^{\lambda_2+n-3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots \\ x_1^{n-3} & x_2^{n-3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix}}.$$

Знаменатель в этом выражении является определителем Вандермонда; он равен

$$\prod_{i < j} (x_i - x_j),$$

а числитель обращается в 0 при  $x_i = x_j$ ; поэтому числитель делится на знаменатель, и частное является многочленом (а не рациональной функцией).

Имеется также детерминантная формула для *многочленов Шура*  $s_\lambda$  непосредственно в переменных  $p_1, p_2, \dots$ . Она имеет вид

$$s_\lambda(p_1, p_2, \dots) = \begin{vmatrix} s_{\lambda_1} & s_{\lambda_1+1} & s_{\lambda_1+2} & \dots \\ s_{\lambda_2-1} & s_{\lambda_2} & s_{\lambda_2+1} & \dots \\ s_{\lambda_3-2} & s_{\lambda_3-1} & s_{\lambda_3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \det |s_{\lambda_i-i+j}|_{i,j=1,\dots,\ell},$$

где размер определителя  $\ell$  выбирается произвольно так, чтобы  $\lambda_i = 0$  при  $i > \ell$ . Здесь одночастичные многочлены Шура  $s_k(p_1, p_2, \dots)$  определяются разложением

$$\begin{aligned} 1 + s_1 + s_2 + s_3 + \dots &= e^{p_1 + \frac{p_2}{2} + \frac{p_3}{3} + \dots} \\ &= 1 + p_1 + \frac{1}{2!}(p_1^2 + p_2) + \frac{1}{3!}(p_1^3 + 3p_1p_2 + 2p_3) + \dots \end{aligned}$$

Многочлены Шура  $s_\lambda$ , будучи образами неприводимых характеров  $\chi_\lambda^*$ , образуют ортонормированный базис в пространстве многочленов. Из соотношений ортогональности вытекает следующее тождество

$$\sum_{\lambda} s_\lambda(p) s_\lambda(q) = e^{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k q_k}{k}}$$

для двух независимых наборов переменных  $p = (p_1, p_2, \dots)$  и  $q = (q_1, q_2, \dots)$ . Действительно, однородные компоненты левой и правой частей этого равенства представляют элементы Казимира из тензорного квадрата пространства  $\mathcal{P}_n$ , выраженные в двух разных базисах. Полагая  $q_1 = 1$  и  $q_i = 0$  при

$i > 1$ , мы получаем следующее разложение для функции  $e^{p_1}$  по многочленам Шура:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_1^n}{n!} = e^{p_1} = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(1, 0, 0, \dots) s_{\lambda}(p_1, p_2, p_3, \dots).$$

С другой стороны, моном  $p_1^n$  соответствует единичному элементу  $1 \in Z\mathbb{C}[S_n]$ , коэффициенты разложения которого по неприводимым характеристам вычисляются из равенств предыдущего пункта:

$$1 = \sum_{\lambda \vdash n} \dim_{\lambda} \chi_{\lambda}^*.$$

Сравнивая два последних разложения мы получаем также следующую альтернативную формулу для размерности неприводимого представления

$$\frac{\dim_{\lambda}}{|\lambda|!} = s_{\lambda}(1, 0, 0, \dots).$$

Функции Шура являются собственными для оператора  $W_2$ , то есть для оператора умножения на  $C_{1^{n-2}1}$  (равно как и для произвольного другого оператора из центра групповой алгебры). Для подсчета соответствующих собственных чисел удобно воспользоваться элементами Юциса–Мерфи групповой алгебры.

## 2.4 Элементы Юциса–Мерфи

По определению, элемент Юциса–Мерфи [20, 27]  $X_k \in \mathbb{C}[S_n]$ , для  $k = 1, 2, \dots, n$ , равен сумме транспозиций элемента  $k$  с меньшими элементами,

$$X_k = (1, k) + (2, k) + \dots + (k-1, k).$$

В частности,  $X_1 = 0$ , а класс транспозиций  $C_{1^{n-2}1} \in \mathbb{C}[S_n]$  представляется в виде суммы

$$C_{1^{n-2}1} = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Элементы Юциса–Мерфи групповой алгебры  $\mathbb{C}[S_n]$  не лежат в центре этой алгебры. Однако симметрические многочлены от них уже лежат в  $Z\mathbb{C}[S_n]$ ; более того, они порождают этот центр.

Юцис и Мерфи доказали (независимо, примерно в одно и то же время) следующую теорему.

**Теорема 2.4.1.** *Элементы  $X_k$  попарно коммутируют, то есть порождают коммутативную подалгебру. Центр групповой алгебры  $Z\mathbb{C}[S_n]$  совпадает с подалгеброй, образованной симметрическими многочленами от элементов  $X_k$ .*

Например, элемент  $C_{1^{n-2}2^1}$  равен первой элементарной симметрической функции от элементов Юциса–Мерфи.

**Теорема 2.4.2.** [32] *Рассмотрим в групповой алгебре  $\mathbb{C}[S_n]$  подалгебры  $\mathbb{C}[S_k]$ , порожденные перестановками первых  $k$  элементов, для  $k = 1, 2, \dots, n$ . Тогда подалгебра в  $\mathbb{C}[S_n]$ , порожденная элементами Юциса–Мерфи, совпадает с подалгеброй, порожденной центрами  $Z\mathbb{C}[S_1], Z\mathbb{C}[S_2], \dots, Z\mathbb{C}[S_n]$ .*

Рассмотрим теперь произвольный элемент  $Y \in Z\mathbb{C}[S_n]$ . Наша ближайшая задача состоит в том, чтобы вычислить скаляр  $y(\lambda)$ , умножением на который действует элемент  $Y$  в неприводимом представлении  $\lambda$ . Изобразим разбиение  $\lambda$  в виде диаграммы Юнга, то есть таблицы со строками длин  $\lambda_i$ . Ячейки этой таблицы имеют координаты  $(i, j)$ , где  $1 \leq i \leq \ell(\lambda)$ ,  $1 \leq j \leq \lambda_i$ . Назовем *содержанием* ячейки с координатами  $(i, j)$  разность координат  $c(i, j) = j - i$ . Содержания всех ячеек диаграммы  $\lambda$  образует неупорядоченный набор  $c(\lambda)$  из  $n$  целых чисел.

По теореме выше, для всякого элемента  $Y \in Z\mathbb{C}[S_n]$  существует симметрический многочлен  $P$  от  $n$  переменных, такой, что  $Y = P(X_1, \dots, X_n)$ . Следующий результат доказан (хотя и не сформулирован явно) в статье Окунькова и Вершика [32].

**Теорема 2.4.3.** *Предположим, что данный элемент  $Y \in Z\mathbb{C}[S_n]$  представлен как симметрический многочлен  $P$  от элементов Юциса–Мерфи. Тогда собственное число  $y(\lambda)$  действия элемента  $Y$  в неприводимом представлении  $\lambda$  равно значению многочлена  $P$  на наборе содержаний диаграммы  $\lambda$ ,*

$$y(\lambda) = P(c(\lambda)).$$

Например, для оператора  $W_2 = C_{1^{n-2}2^1} = \sum X_i$  собственное число равно

$$w_2(\lambda) = \sum_{(i,j) \in \lambda} (j - i) = \frac{1}{2} \sum_i \left( \left( \lambda_i - i + \frac{1}{2} \right)^2 - \left( -i + \frac{1}{2} \right)^2 \right).$$

Это равенство заканчивает доказательство следующей явной формулы для несвязных простых чисел Гурвица  $H^\circ = e^{u W_2} e^{p_1}$ :

$$H^\circ = \sum_{\lambda} e^{w_2(\lambda)u} s_{\lambda}(1, 0, \dots) s_{\lambda}(p). \quad (2.4)$$

Действительно, начальный член  $H^\circ|_{u=0} = e^{p_1}$  при  $u = 0$  задается разложением функции  $e^{p_1}$  по базису многочленов Шура, приведенному выше. Далее, экспонента линейного оператора  $W_2$  в собственном базисе из многочленов Шура является диагональным оператором, и его собственные числа являются экспонентами вычисленных выше собственных чисел оператора  $W_2$ , что и доказывает равенство.

Мы не будем приводить доказательство теоремы о собственных числах, ограничимся лишь некоторыми комментариями. В статье Окунькова–Вершика предъядвлен специальный базис в каждом неприводимом представлении  $\lambda$ , называемый *базисом Юнга*. Элементы этого базиса нумеруются *заполнениями* диаграммы Юнга — расстановками чисел от 1 до  $n$  в клетки диаграммы так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце расставленные числа монотонно возрастали (в частности, размерность  $\dim_\lambda$  неприводимого представления равна количеству заполнений диаграммы Юнга  $\lambda$  — это дает еще один, комбинаторный, способ вычисления  $\dim_\lambda$ ). В статье доказано, что базис Юнга является общим собственным базисом для элементов Юциса–Мерфи. Более того, элемент  $X_k$  действует на базисный элемент, соответствующий данному заполнению, умножением на содержание клетки с номером  $k$ . Тем самым, набор собственных чисел для элементов Юциса–Мерфи для различных векторов базиса Юнга один и тот же с точностью до перестановки элементов. А значит, значение всякой симметрической функции на этом наборе собственных чисел не зависит от элемента базиса Юнга, что и приводит к утверждению теоремы.

## 2.5 Задачи

## Глава 3

# Полубесконечный грассманиан и уравнения Кадомцева–Петвиашвили

Мы начали этот курс с теоремы Окунькова, утверждающей, что производящая функция для простых чисел Гурвица является  $\tau$ -функцией иерархии Кадомцева–Петвиашвили, а производящая функция для связанных простых чисел Гурвица — решением этой иерархии. Иерархия Кадомцева–Петвиашвили (ниже — КП) это вполне интегрируемая система уравнений в частных производных на функции, зависящие от бесконечного набора переменных. Происхождение и физическая природа уравнений этой иерархии хорошо описаны, например, в [8], и мы не будем на них останавливаться. Нас будут интересовать лишь некоторые функции, удовлетворяющие всем уравнениям этой иерархии, и мы будем пользоваться описанием пространства ее решений, которое дадим ниже.

### 3.1 Иерархия КП

#### 3.1.1 Уравнения иерархии КП

В математической физике имеются различные стандарты обозначения переменных в зависимости от выбора нормировки; мы будем пользоваться переменными  $p_1, p_2, \dots$ , в которых младшее из уравнений иерархии КП имеет вид

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p_2^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial p_1 \partial p_3} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial p_1^2} \right)^2 - \frac{1}{12} \frac{\partial^4 F}{\partial p_1^4}, \quad (3.1)$$

или

$$F_{22} = F_{1^{131}} - \frac{1}{2}(F_{12})^2 - \frac{1}{12}F_{14}.$$

(Здесь разбиение в индексе функции состоит из индексов переменных  $p$ , по которым ведется частное дифференцирование. Мы пользуемся мультипликативной записью разбиений; так, разбиение  $2^23^1$  это разбиение числа 7, две части в котором равны 2, а третья 3.) В нем участвуют дифференцирования лишь по первым трем переменным, и сумма индексов в каждом мономе равна 4. В индексах следующих уравнений иерархии содержатся разбиения чисел 5, 6, ... :

$$\begin{aligned} F_{2^{131}} &= -F_{12}F_{1^{121}} + F_{1^{141}} - \frac{1}{6}F_{1^{321}} \\ F_{2^{141}} &= -\frac{1}{2}F_{1^{121}}^2 - F_{12}F_{1^{131}} + \frac{1}{8}F_{13}^2 + \frac{1}{12}F_{12}F_{14} - \frac{1}{4}F_{1^{331}} + \frac{1}{120}F_{16} \\ F_{32} &= \frac{1}{3}F_{12}^3 - F_{1^{121}}^2 - F_{12}F_{1^{131}} + F_{1^{151}} + \frac{1}{4}F_{13}^2 + \frac{1}{3}F_{12}F_{14} - \frac{1}{3}F_{1^{331}} + \frac{1}{45}F_{16} \end{aligned}$$

Отметим, что в левой части уравнений иерархии стоят вторые производные по переменным, номера которых превышают 1, тогда как в правой части номера всех переменных, кроме, быть может одной, в дифференцированиях равны 1.

Экспоненты решений иерархии КП называются ее  $\tau$ -функциями.

Описываемая нами ниже конструкция Сато [36] интерпретирует пространство решений уравнений КП как грассманиан полубесконечных плоскостей в бесконечномерном пространстве. Она позволяет построить все решения уравнений КП. Для решения обратной задачи — доказать, что данная функция является решением — достаточно указать соответствующую ей полубесконечную плоскость. Это означает, в частности, что для идентификации функции в качестве решения иерархии КП нет необходимости знать уравнения иерархии. Мы укажем, в том числе, и полубесконечную плоскость, отвечающую производящей функции  $H$  для простых чисел Гурвица.

### 3.1.2 Вложения грассманианов и уравнения Плюккера

Рассмотрим грассманиан  $G(2, V)$  двумерных плоскостей в 4-мерном векторном пространстве  $V \cong \mathbb{C}^4$ . Всякую двумерную плоскость в  $V$  можно представить в виде внешнего произведения  $\beta_1 \wedge \beta_2$  любой пары принадлежащих ей линейно независимых векторов  $\beta_1, \beta_2$ . Это векторное произведение определено корректно с точностью до ненулевого множителя; оно определяет двумерную плоскость однозначно, а значит, таким образом можно задать вложение грассманиана  $G(2, V)$  в проективизацию внешнего квадрата пространства  $V$ ,  $G(2, V) \hookrightarrow P\Lambda^2 V$ . Изложенная конструкция немедленно обобщается на вложения произвольного грассманиана  $G(k, V)$   $k$ -мерных плоскостей в  $n$ -мерном векторном пространстве  $V$  в проективизацию  $P\Lambda^k V$ .



Уравнения Плюккера это уравнения, задающие образ указанного вложения. Грассманиан  $G(k, V)$ , при  $\dim V = n$ , имеет размерность  $k(n - k)$ , а размерность пространства  $P\Lambda^k V$  равна  $\binom{n}{k} - 1$ , что, как правило, превосходит  $k(n - k)$ ; значит, вообще говоря, образ плюккерова вложения не совпадает со всем проективизированным внешним произведением  $P\Lambda^k V$ . Например, образ вложения многообразия  $G(2, 4)$  в  $P\Lambda^2 \mathbb{C}^4$  представляет собой гиперповерхность в 5-мерном проективном пространстве.

Для того, чтобы задать эту гиперповерхность уравнением, выберем базис  $e_1, e_2, e_3, e_4$  в  $V$ . Этот базис порождает базис  $\beta_{ij} = e_i \wedge e_j$ ,  $1 \leq i < j \leq 4$ , пространства  $\Lambda^2 V$  и естественную систему координат  $y_{ij}$  в этом пространстве. Образ вложения грассманиана состоит из разложимых векторов. По определению внешнего произведения, образ плоскости, натянутой на пару векторов  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ ,  $(b_1, b_2, b_3, b_4)$ , имеет проективные координаты

$$y_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} = a_i b_j - a_j b_i,$$

откуда

$$y_{12}y_{34} - y_{13}y_{24} + y_{14}y_{23} = 0.$$

Это и есть уравнение Плюккера вложения.

Для произвольных значений  $n$  и  $k$  уравнения Плюккера остаются квадратичными. Если мы зафиксировали базис в векторном пространстве  $V$  размерности  $n$ , и выбрали базис в его  $k$ -мерном подпространстве, то координаты базисных векторов подпространства относительно базиса пространства  $V$  образуют  $k \times n$ -матрицу  $A = (a_{ij})$  ( $i$ -я строка этой матрицы — это набор координат  $i$ -го базисного вектора подпространства). В свою очередь,  $k \times k$ -миноры матрицы  $A$  образуют набор проективных координат точки в  $\Lambda^k V$ , отвечающей выбранной  $k$ -плоскости при вложении Плюккера. Таким образом, *соотношения Плюккера* — это уравнения на  $k \times k$ -миноры в  $k \times n$ -матрицах.

Все соотношения Плюккера можно выписать следующим образом. Пусть  $u \in \Lambda^{k+1} V^\vee$  — элемент  $(k+1)$ -й внешней степени векторного пространства, двойственного к  $V$ , а  $w \in \Lambda^{k-1} V^\vee$  — элемент его  $(k-1)$ -й внешней степени. Результат  $\xi \lrcorner u$  подстановки вектора  $\xi \in \Lambda^k V$  в  $u$  является вектором из  $V^\vee$ , а результат  $w \lrcorner \xi$  подстановки вектора  $w$  в  $\xi$  является вектором из  $V$ . Спарив между собой эти два вектора и приравняв результат к 0, мы получаем соотношение Плюккера, отвечающее паре  $u, w$ :

$$(\xi \lrcorner u, w \lrcorner \xi) = 0.$$

Это соотношение выполняется для любого разложимого вектора  $\xi$  и любой пары векторов  $u, w$ . Действительно, вектор  $w \lrcorner \xi$  лежит в подпространстве в  $V$ , которому отвечает вектор  $\xi$ , а ковектор  $\xi \lrcorner u$  есть элемент аннулятора этого подпространства. Ограничившись базисными векторами  $u \in \Lambda^{k+1} V^\vee$  и  $w \in \Lambda^{k-1} V^\vee$  (например, отвечающим внешним произведениям элементов базиса  $e_1^\vee, \dots, e_n^\vee$ , двойственного к  $e_1, \dots, e_n$ ), мы получаем конечный набор уравнений Плюккера, задающих образ вложения грассманиана.

Другими словами, идеал в кольце многочленов, состоящий из многочленов, обращающихся в нуль на образе плюккерова вложения, порождается квадратичными многочленами, см., например, [15].

### 3.1.3 Пространство рядов Лорана и его полубесконечная внешняя степень

Возьмем в качестве пространства  $V$  бесконечномерное пространство рядов Лорана от одной переменной. Элементы этого пространства имеют вид  $c_{-k}z^{-k} + c_{-k+1}z^{-k+1} + \dots$ . Мономы  $z^k$ ,  $k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$  образуют стандартный базис в  $V$ . По определению, полубесконечная внешняя степень  $\Lambda^{\infty} V$  это векторное пространство, натянутое на вектора

$$v_{\mu} = z^{m_1} \wedge z^{m_2} \wedge z^{m_3} \wedge \dots, \quad m_1 < m_2 < m_3 < \dots, \quad m_i = \mu_i - i,$$

где  $\mu$  — разбиение,  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots)$ ,  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \dots$ , в котором все части, за исключением конечного числа, равны 0. В частности,  $m_i = -i$  для всех достаточно больших  $i$ .

Пустому разбиению отвечает вакуум-вектор

$$v_{\emptyset} = z^{-1} \wedge z^{-2} \wedge z^{-3} \wedge \dots$$

Аналогично,

$$v_{11} = z^0 \wedge z^{-2} \wedge z^{-3} \wedge \dots, \quad v_{21} = z^1 \wedge z^{-2} \wedge z^{-3} \wedge \dots, \quad v_{12} = z^0 \wedge z^{-1} \wedge z^{-3} \wedge \dots,$$

и т.д..

Нумерация базисных векторов полубесконечного внешнего произведения  $\Lambda^{\infty} V$  (пространства фермионов) разбиениями целых неотрицательных чисел устанавливает его естественный изоморфизм с пространством бозонов — степенных рядов от бесконечного набора переменных  $p_1, p_2, \dots$  — как векторных пространств. Этот изоморфизм переводит базисный вектор  $v_{\mu}$  в многочлен Шура  $s_{\mu} = s_{\mu}(p_1, p_2, \dots)$ . Последний является квазиоднородным многочленом степени  $|\mu|$  от переменных  $p_i$  (степень переменной  $p_i$ , по определению, равна  $i$ ). Многочлены Шура образуют аддитивный базис векторного пространства степенных рядов от переменных  $p_i$ .

Есть и другой, более инвариантный, способ описать бозон-фермионное соответствие. А именно, для  $i = 1, 2, 3, \dots$  обозначим через  $\widehat{z^{-i}}$  оператор сдвига, действующий в пространстве  $V$  и переводящий  $z^m$  в  $z^{m-i}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Это действие продолжается на пространство фермионов по правилу Лебница,

$$\widehat{z^{-i}} : z^{m_1} \wedge z^{m_2} \wedge \dots \mapsto z^{m_1-i} \wedge z^{m_2} \wedge \dots + z^{m_1} \wedge z^{m_2-i} \wedge \dots + \dots$$

Обозначим треугольными скобками  $\langle v \rangle$  коэффициент при вакуум-векторе  $v_{\emptyset}$  в разложении фермиона  $v$  по базису  $v_{\mu}$ . В этих обозначениях бозон-фермионное

соответствие сопоставляет вектору  $v \in \Lambda^{\frac{\infty}{2}} V$  следующий формальный ряд от переменных  $p_k$ :

$$v \mapsto \left\langle e^{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{i} \widehat{z}^{-i}} v \right\rangle.$$

Эта формула интерпретируется следующим образом. При бозон-фермионном соответствии оператор  $\widehat{z}^{-i}$ , действующий в пространстве фермионов, переходит в оператор  $i \frac{\partial}{\partial p_i}$ , действующий в пространстве бозонов. Так что приведенная формула есть не что иное, как формула Тейлора

$$f(p) = e^{\sum_{i=0}^{\infty} p_i \frac{\partial}{\partial q_i}} f(q) \Big|_{q=0}.$$

Отметим также, что для положительных  $i$  оператор сдвига  $\widehat{z}^i$  действует в пространстве бозонов умножением на переменную  $p_i$ . Поэтому в обратную сторону бозон-фермионное соответствие сопоставляет многочлену (или, более общим образом, степенному ряду)  $f(p_1, p_2, \dots)$  вектор  $f(\widehat{z}^1, \widehat{z}^2, \dots) v_0$  из пространства фермионов.

### 3.1.4 Полубесконечный грассманиан и уравнения КП

Полубесконечный грассманиан  $G(\frac{\infty}{2}, V)$  состоит из разложимых векторов в  $P\Lambda^{\frac{\infty}{2}} V$ , т.е. из векторов вида

$$\beta_1(z) \wedge \beta_2(z) \wedge \beta_3(z) \wedge \dots,$$

где  $\beta_i$  это ряды Лорана от переменной  $z$  и для достаточно больших  $i$  старший член разложения ряда  $\beta_i$  равен  $z^{-i}$ :

$$\beta_i(z) = z^{-i} + c_{i1} z^{-i+1} + c_{i2} z^{-i+2} + \dots$$

Каждое такое бесконечное внешнее произведение, рассматриваемое с точностью до умножения на ненулевую константу, взаимно-однозначно соответствует полубесконечной плоскости в  $V$ , натянутой на вектора  $\beta_1, \beta_2, \dots$

**Определение 3.1.1.** Уравнения Хироты это уравнения Плюккера вложения полубесконечного грассманиана в проективизированное полубесконечное внешнее произведение  $P\Lambda^{\frac{\infty}{2}} V$ . Решения уравнений Хироты (т.е. полубесконечные плоскости) называются  $\tau$ -функциями иерархии КП.

Вот один из способов представить уравнения Хироты: следующее равенство должно выполняться тождественно по  $p$  и  $q$ :

$$\operatorname{Res}_{z=0} e^{2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{q_i}{i} z^{-i}} \tau(p_1 - q_1 + z, p_2 - q_2 + z^2, \dots) \tau(p_1 + q_1 - z, p_2 + q_2 - z^2, \dots) \frac{dz}{z^2} = 0;$$

здесь через  $\operatorname{Res}_{z=0}$  обозначена операция взятия вычета 1-формы переменной  $z$  в точке  $z = 0$ .

Приведенное равенство интерпретируется следующим образом. Разложим левую часть в формальный ряд по  $q$ -переменным. Тогда коэффициент

при каждом мономе — конечная квадратичная полиномиальная комбинация частных производных функции  $\tau = \tau(p_1, p_2, \dots)$ . Например, уравнение, соответствующее моному  $q_3$ , имеет вид

$$\tau_2^2 - \tau_1\tau_3 - \frac{1}{4}\tau_{1^2}^2 + \tau_1\tau_3 - \tau\tau_{2^2} + \frac{1}{3}\tau_1\tau_{1^3} - \frac{1}{12}\tau\tau_{1^4} = 0.$$

Каждое из таких квадратичных дифференциальных уравнений можно рассматривать как совокупность квадратичных алгебраических соотношений на коэффициенты Тейлора функции  $\tau$ , которые и образуют соотношения Плюккера. С другой стороны, после подстановки  $\tau = e^F$  уравнения на функцию  $\tau$  преобразуются в уравнения на функцию  $F$ . Например, приведенное выше уравнение на функцию  $\tau$  эквивалентно уравнению (3.1).

Даже если ограничиться уравнениями Хироты, отвечающими базисным парам векторов, их количество слишком велико. Дубровин и Натанзон [9] построили существенно меньшее семейство уравнений, порождающих все уравнения Хироты. Мы приводим описание этого семейства в форме, которую ему придали Шадрин и Звонкин [37].

Определим дифференциальный оператор  $D_\mu$  для разбиения  $\mu$  равенством

$$\begin{aligned} D_\mu &= \sum_{\lambda \vdash |\mu|} \frac{\chi_\mu(\lambda)}{|\text{Aut}(\lambda)|} \frac{\partial}{\partial p_{\lambda_1}} \frac{\partial}{\partial p_{\lambda_2}} \cdots \\ &= s_\mu \left( \frac{\partial}{\partial p_1}, 2 \frac{\partial}{\partial p_2}, 3 \frac{\partial}{\partial p_3}, \dots \right) \end{aligned}$$

В частности,

$$\begin{aligned} D_\emptyset &= 1; & D_{1^1} &= \frac{\partial}{\partial p_1}; & D_{2^1} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial p_1^2} + \frac{\partial}{\partial p_2}; & D_{1^2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial p_1^2} - \frac{\partial}{\partial p_2}; \\ D_{3^1} &= \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial p_1^3} + \frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial p_2} + \frac{\partial}{\partial p_3}; & D_{1^1 2^1} &= \frac{1}{3} \frac{\partial^3}{\partial p_1^3} - \frac{\partial}{\partial p_3}; & D_{1^3} &= \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial p_1^3} - \frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial p_2} + \frac{\partial}{\partial p_3}. \end{aligned}$$

Тогда уравнения Хироты можно записать в виде

$$\text{Hir}_{(i,j)}(\tau) = D_\emptyset(\tau) \cdot D_{(i,j)}(\tau) - D_{(i-1)}(\tau) D_{(i,j)}(\tau) + D_{(j)}(\tau) D_{(i-1,j)}(\tau) = 0;$$

здесь  $i, j$  пробегает натуральные числа, большие 1. В свою очередь, уравнения КП принимают вид

$$\text{KP}_{(i,j)}(F) = e^{-2F} \text{Hir}_{(i,j)}(e^F) = 0.$$

**Определение 3.1.2.** Форма, которую принимают уравнения Хироты как уравнения на логарифм  $\tau$ -функции, называется *уравнениями иерархии Кадомцева–Петвиашвили*.

Например, после подстановки  $\tau = e^F$  и деления на  $e^{2F}$  первое уравнение Хироты превращается в первое уравнение КП

$$F_{1,3} - F_{2,2} - \frac{1}{2}F_{1,1}^2 - \frac{1}{12}F_{1,1,1,1} = 0.$$

Другими словами, всякое решение иерархии КП можно получить в результате следующей процедуры:

- возьмем внешнее произведение  $\beta_1(z) \wedge \beta_2(z) \wedge \dots$ , соответствующее какой-либо полубесконечной плоскости в пространстве  $V$ ;
- воспользовавшись разложениями функций  $\beta_i$  в ряды Лорана, представим соответствующую точку в полубесконечном грассманиане в виде линейной комбинации базисных векторов  $v_\kappa$  (содержащей, вообще говоря, бесконечно много ненулевых слагаемых) и умножим на константу, чтобы сделать коэффициент при вакуум-векторе  $v_\emptyset$  равным 1;
- заменим в получившейся линейной комбинации всякий вектор  $v_\kappa$  соответствующим многочленом Шура  $s_\kappa(p_1, p_2, \dots)$ , получив тем самым степенной ряд от бесконечного набора переменных  $p_1, p_2, \dots$ ;
- возьмем логарифм полученного ряда.

Таким образом, в наших руках имеется универсальный механизм, позволяющий генерировать все решения КП. Задача же проверки того, является ли та или иная функция таким решением, как правило, более сложна. Полубесконечную плоскость, отвечающую производящей функции  $H^\circ$  для простых чисел Гурвица, мы предъявим в разделе 3.2.

## 3.2 Комбинаторные представители семейства Орлова–Щербина решений уравнений иерархии КП

Производящая функция для чисел Гурвица принадлежит одному довольно обширному семейству решений иерархии КП. Упомянутое семейство содержит большое количество других комбинаторных решений иерархии, коэффициенты которых перечисляют различные объекты, связанные с комбинаторикой симметрических групп. В этом параграфе мы дадим описание этого семейства и приведем различные специализации его параметров, приводящие к ответам в некоторых комбинаторных задачах.

### 3.2.1 Описание семейства

Каждому разбиению  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_\ell)$  числа  $n$  можно стандартным образом сопоставить диаграмму Юнга, состоящую из  $n$  клеток; количество строчек  $\ell$

в этой диаграмме, т.е. количество частей в разбиении  $\mu$ , мы будем обозначать через  $\ell(\mu)$ . Назовем *содержанием* клетки  $w$  диаграммы Юнга, находящейся на пересечении ее  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца, величину  $c(w) = j - i$ ,  $1 \leq i \leq \ell(\mu)$ ,  $1 \leq j \leq \mu_i$ . *Содержанием*  $c(\mu)$  диаграммы  $\mu$  будем называть неупорядоченный набор содержаний ее клеток. Положим также

$$y_\mu = \prod_{w \in \mu} y_{c(w)}.$$

Например,

$$c((5, 3, 3, 2)) = (-3, -2, -2, -1, -1, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 4)$$

и

$$y_{(5,3,3,2)} = y_{-3} y_{-2}^2 y_{-1}^2 y_0^3 y_1^2 y_2 y_3 y_4;$$

степень этого монома равна количеству клеток в диаграмме (в примере клеток 13, см. рис. 3.1).

|    |    |   |   |   |
|----|----|---|---|---|
| 0  | 1  | 2 | 3 | 4 |
| -1 | 0  | 1 |   |   |
| -2 | -1 | 0 |   |   |
| -3 | -2 |   |   |   |

Рис. 3.1: Диаграмма Юнга, в каждой клетке которой записано содержание этой клетки

Следующая теорема представляет собой результат А. Ю. Орлова и Д. М. Щербина [33] в форме, которую придали ему Гульден и Джексон [14].

**Теорема 3.2.1.** *Производящая функция*

$$\sum_{\mu} y_{\mu} \frac{\dim_{\mu}}{|\mu|!} s_{\mu}(p_1, p_2, \dots),$$

где  $\dim_{\mu}$  есть размерность неприводимого представления симметрической группы  $S_{|\mu|}$ , отвечающего разбиению  $\mu$ , является семейством  $\tau$ -функций иерархии КП.

Отметим, что множитель  $\frac{\dim_{\mu}}{|\mu|!}$  может быть записан в виде  $\frac{\dim_{\mu}}{|\mu|!} = s_{\mu}(1, 0, 0, \dots)$ .

В частности, подставляя вместо переменных  $\dots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \dots$  конкретные значения, мы получаем конкретные  $\tau$ -функции, а их логарифмы дают решения иерархии КП.

*Доказательство.* При  $y_c \equiv 1$ ,  $c = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ , указанная  $\tau$ -функция принимает вид

$$\sum_{\mu} \frac{\dim_{\mu}}{|\mu|!} s_{\mu}(p) = e^{p_1},$$

что является специализацией хорошо известного тождества для функций Шура  $e^{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k q_k}{k}} = \sum_{\mu} s_{\mu}(p) s_{\mu}(q)$ , см., например, [35]. Эта  $\tau$ -функция соответствует в фермионном представлении бесконечному произведению  $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \dots$ , в котором

$$\beta_k = e^z z^{-k} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^{i-k}}{i!}. \quad (3.2)$$

Заметим, что ее логарифм  $p_1$  является решением иерархии КП по очевидным причинам — все производные в уравнениях иерархии имеют по крайней мере второй порядок.

В случае общих значений параметров  $y_c$  предъявленное фермионное представление нужно модифицировать следующим образом. Положим

$$u_k = \begin{cases} \prod_{i=1}^k y_i, & k > 0, \\ \frac{1}{\prod_{i=k+1}^0 y_i}, & k \leq 0. \end{cases}$$

Иными словами, мы выбрали  $u_k$  таким образом, чтобы при всех целых  $k \leq \ell$  выполнялось равенство  $\frac{u_k}{u_{\ell}} = \prod_{i=k+1}^{\ell} y_i$ . В этих обозначениях компоненты внешнего произведения, соответствующего  $\tau$ -функции теоремы, имеют вид

$$\beta_k = \frac{1}{u_{-k}} \sum_{i=0}^{\infty} u_{i-k} \frac{z^{i-k}}{i!}.$$

Действительно, при такой модификации внешнего произведения его коэффициент при  $v_{\mu} = z^{\mu_1-1} \wedge z^{\mu_2-2} \wedge \dots$  в разложении по базисным векторам умножится на моном  $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{u_{\mu_k-k}}{u_{-k}} = y_{\mu}$ , чего мы и добивались.

*Замечание 3.2.2.* Действуя на полубесконечную плоскость в пространстве рядов Лорана  $V$  линейным оператором, мы получаем, вообще говоря, другую полубесконечную плоскость, которая, в свою очередь, задает другую  $\tau$ -функцию иерархии КП. В частности,  $\tau$ -функции семейства Орлова–Щербина получаются из  $\tau$ -функции  $e^{p_1}$  в результате действия на плоскость (3.2) диагональным оператором, матрица которого в стандартном базисе  $\dots, z^{-2}, z^{-1}$ ,

$z^0, z^1, z^2, \dots$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & & & & & & \\ \dots & \frac{1}{y_0 y_{-1} y_{-2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \\ \dots & 0 & \frac{1}{y_0 y_{-1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \\ \dots & 0 & 0 & \frac{1}{y_0} & 0 & 0 & 0 & \dots & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & y_1 & 0 & \dots & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_1 y_2 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix}$$

*Пример 3.2.3.* Для получения  $\tau$ -функции  $H^\circ$  для простых чисел Гурвица нужно положить  $y_c = e^{uc}$ ,  $c = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ .

*Пример 3.2.4* (Обобщенные числа Гурвица). Простые числа Гурвица перечисляют разложения перестановки данного циклового типа в произведение данного числа транспозиций. Рассмотрим более общую задачу, в которой транспозиции заменяются на перестановки с фиксированным количеством циклов. Эти числа были введены в [14].

Назовем *вырожденностью* разбиения  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$  число  $k(\lambda) = |\lambda| - \ell(\lambda) = \sum_{i=1}^{\ell} (\lambda_i - 1)$ . *Вырожденностью перестановки* называется вырожденность набора длин ее циклов. Иначе говоря, вырожденность перестановки — минимальное число транспозиций, в произведение которых эта перестановка может быть разложена. Положим

$$a_{k_1, \dots, k_m; \mu}^\circ = \frac{1}{|\mu|!} |\{(\tau_1, \dots, \tau_m), \tau_i \in S_{|\mu|} \mid k(\tau_i) = k_i, \tau_1 \circ \dots \circ \tau_m \in C_\mu(S_{|\mu|})\}|$$

и определим числа  $a_{k_1, \dots, k_m; \mu}$  аналогичным образом, потребовав дополнительно, чтобы подгруппа в  $S_{|\mu|}$ , порожденная перестановками  $\tau_1, \dots, \tau_m$ , действовала на множестве  $\{1, \dots, |\mu|\}$  транзитивно. Производящие функции

$$A_m^\circ(u_1, \dots, u_m; p_1, p_2, \dots) = \sum_{\mu, k_1, \dots, k_m} a_{k_1, \dots, k_m; \mu}^\circ p_{\mu_1} p_{\mu_2} \dots u_1^{k_1} \dots u_m^{k_m} \quad (3.3)$$

и

$$A_m(u_1, \dots, u_m; p_1, p_2, \dots) = \sum_{\mu, k_1, \dots, k_m} a_{k_1, \dots, k_m; \mu} p_{\mu_1} p_{\mu_2} \dots u_1^{k_1} \dots u_m^{k_m} \quad (3.4)$$

связаны между собой соотношением

$$A_m^\circ = \exp A_m,$$

и справедливо следующее утверждение:

*Теорема 3.2.5.* [14] *Производящая функция  $A_m^\circ(u_1, \dots, u_m; p_1, p_2, \dots)$  для обобщенных чисел Гурвица является  $t$ -параметрическим семейством  $\tau$ -функций для иерархии КП, а ее логарифм  $A_m(u_1, \dots, u_m; p_1, p_2, \dots)$  —  $t$ -параметрическим семейством решений этой иерархии.*



Производящая функция  $A_m^\circ$  соответствует набору значений параметров  $y_c = \prod_{i=1}^m (1 + u_i c)$  для  $c = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$  в семействе Орлова–Шербина:

$$A_m^\circ(u_1, \dots, u_m; p_1, p_2, \dots) = \sum_{\mu} \left( \prod_{w \in \mu} \prod_{i=1}^m (1 + u_i c(w)) \right) \frac{\dim_{\mu}}{|\mu|!} s_{\mu}(p_1, p_2, \dots).$$

Действительно, обозначим через  $C^{(k)} \in ZCS_n$  сумму всех перестановок вырожденности  $k$ . Тогда  $a_{k_1, \dots, k_m; \mu}^\circ$  равно коэффициенту при  $\frac{C_{\mu}^{\mu}}{|\mu|!}$  в разложении элемента  $\frac{1}{n!} C^{(k_1)} \dots C^{(k_m)}$  по базису  $C_{\mu}$ . Поэтому вычисление производящей функции для этих чисел сводится при помощи теоремы 2.4.3 к вычислению собственных чисел оператора умножения на  $C^{(k)}$  в  $ZCS_n$ . Для вычисления этих собственных чисел заметим, что  $C^{(k)}$  выражается как  $k$ -я элементарная симметрическая функция от элементов Юциса–Мерфи,

$$C^{(k)} = \sigma_k(X_1, \dots, X_n), \quad \sum_{k=0}^n C^{(k)} u^k = \prod_{i=1}^n (1 + X_i u).$$

Это следует из того, что всякая перестановка  $\tau$  однозначно представляется в виде произведения транспозиций  $\tau = (a_1, b_1) \dots (a_k, b_k)$ ,  $a_i < b_i$ , которое удовлетворяет следующему условию строгой монотонности для участвующих в нем транспозиций:  $b_1 < \dots < b_k$ . (Для доказательства достаточно увидеть, что в качестве  $b_k$  может выступать только наибольший элемент, не оставляемый на месте перестановкой  $\tau$ , после чего можно рассуждать по индукции.) Более того, количество  $k$  транспозиций в таком произведении в точности равно вырожденности перестановки  $\tau$ . Применяя формулу теоремы 2.4.3, мы получаем приведенную выше формулу для производящей функции для обобщенных чисел Гурвица.

*Замечание 3.2.6.* Приведенную формулу для собственных чисел элемента  $\sum_{k=0}^n C^{(k)} u^k \in ZCS_n$  можно записать также в виде тождества для специализации функций Шура, представленного в следующих двух эквивалентных формах

$$s_{\mu}(v, v, v, \dots) = \frac{\dim_{\mu}}{|\mu|!} \prod_{w \in \mu} (v + c(w)),$$

$$u^{|\mu|} s_{\mu}(p_1, p_2, \dots) |_{p_i = u^{-1}} = u^{|\mu|} s_{\mu}(u^{-1}, u^{-1}, \dots) = \frac{\dim_{\mu}}{|\mu|!} \prod_{w \in \mu} (1 + u c(w)).$$

*Пример 3.2.7* (Числа Буске–Мелу–Шеффера). Числа Буске–Мелу–Шеффера, как и обобщенные числа Гурвица, перечисляют разложения перестановки данного циклового типа в произведение данного числа перестановок произвольных цикловых типов. При этом, в отличие от обобщенных чисел Гурвица, фиксируется не вырожденность каждой из перестановок, участвующих в произведении, а их суммарная вырожденность. Эти числа были введены в [7].

Положим

$$b_{m,k;\mu}^{\circ} = \frac{1}{|\mu|!} \left| \{(\tau_1, \dots, \tau_m), \tau_i \in S_{|\mu|} \mid \sum_{i=1}^m k(\tau_i) = k, \tau_1 \circ \dots \circ \tau_m \in C_{\mu}(S_{|\mu|})\} \right|,$$

и определим числа  $b_{m,k;\mu}$  аналогичным образом, потребовав дополнительно, чтобы подгруппа в  $S_{|\mu|}$ , порожденная перестановками  $\tau_1, \dots, \tau_m$ , действовала на множестве  $\{1, \dots, |\mu|\}$  транзитивно. Производящие функции

$$B_m^{\circ}(u; p_1, p_2, \dots) = \sum_{k, \mu} b_{m,k;\mu}^{\circ} p_{\mu_1} p_{\mu_2} \dots u^k \quad (3.5)$$

и

$$B_m(u; p_1, p_2, \dots) = \sum_{k, \mu \neq \emptyset} b_{m,k;\mu} p_{\mu_1} p_{\mu_2} \dots u^k \quad (3.6)$$

связаны между собой соотношением

$$B_m^{\circ} = \exp B_m.$$

Они получаются, очевидно, из производящих функций для обобщенных чисел Гурвица, если положить  $u_1 = \dots = u_m = u$ :

$$\begin{aligned} B_m^{\circ}(u; p_1, p_2, \dots) &= A_m^{\circ}(u, \dots, u; p_1, p_2, \dots), \\ B_m(u; p_1, p_2, \dots) &= A_m(u, \dots, u; p_1, p_2, \dots). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что справедливо следующее утверждение:

*Теорема 3.2.8.* [14] *Производящая функция  $B_m^{\circ}(u; p_1, p_2, \dots)$  для чисел Буске-Мелу-Шеффера является однопараметрическим семейством  $\tau$ -функций для иерархии КП, а ее логарифм  $B_m(u; p_1, p_2, \dots)$  — однопараметрическим семейством решений этой иерархии.*

Соответственно, производящая функция  $B_m^{\circ}$  соответствует набору значений параметров  $y_c = (1 + uc)^m$  для  $c = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$  в семействе Орлова-Щербина:

$$B_m^{\circ}(u; p_1, p_2, \dots) = \sum_{\mu} \prod_{w \in \mu} (1 + uc(w))^m \frac{\dim_{\mu}}{|\mu|!} s_{\mu}(p_1, p_2, \dots).$$

*Замечание 3.2.9.* Если в определении чисел Буске-Мелу-Шеффера не накладывать ограничение на вырожденность перестановок, то есть положить  $u = 1$  в производящей функции для этих чисел, то ответ получается совсем простым,

$$B_m^{\circ}(1; p_1, p_2, \dots) = \sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{m-1} s_k(p).$$

Действительно, при  $u = 1$  произведение  $\prod_{w \in \mu} (1 + uc(w))$  отлично от нуля только если диаграмма Юнга  $\mu$  состоит из одной строки и равно в этом случае  $|\mu|!$ .

Числа Буске-Мелу–Шеффера получили свое название благодаря тому, что были впервые рассмотрены в работе [7]. В этой работе выведена формула для значений связных чисел Буске-Мелу–Шеффера при минимально возможной суммарной вырожденности перестановок, участвующих в разложении данной перестановки в произведение. А именно, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 3.2.10.** [7] Пусть  $\mu$  — разбиение,  $k = |\mu| + \ell(\mu) - 2$  — суммарная вырожденность перестановок в разложении перестановки циклического типа  $\mu$  в произведение  $m$  перестановок. Тогда имеет место равенство

$$b_{m;k,\mu} = \frac{m(m|\mu| - k + 1)^{\overline{\ell(\mu)-3}}}{|\text{Aut}(\mu)|} \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} \binom{m\mu_i - 1}{\mu_i}, \quad (3.7)$$

где через  $a^{\bar{b}}$ , при натуральном  $b$ , обозначен восходящий факториал,

$$a^{\bar{b}} = a(a+1)(a+2)\dots(a+b-1).$$

Формула (3.7) удивительно похожа на формулу Гурвица (1.4.4) для связных простых чисел Гурвица с минимально возможным числом транспозиций. Отличие состоит в том, что экспоненты вида  $a^{b-1}$  в формуле Гурвица заменены восходящими факториалами в формуле Буске-Мелу–Шеффера. Безусловно, эти две формулы имеют общую природу. Однако на текущий момент единый способ их вывести неизвестен.

### 3.3 Алгебра Иванова-Керова и пополненные циклы

«Сумма транспозиций», участвующая в вычислении простых чисел Гурвица, является элементом центра групповой алгебры группы  $S_n$  для произвольного  $n$ . Если, в определении чисел Гурвица подсчет разложений в произведение транспозиций (т.е. циклов длины 2) заменить, например, подсчетом разложений в 3-циклы, то производящий ряд для таких чисел никакими свойствами интегрируемости обладать не будет. Обсудим, какими другими «универсальными», то есть не зависящими от  $n$ , элементами алгебр  $ZC[S_n]$  можно заменить транспозиции так, чтобы производящие функции для количеств разложений в произведения этих элементов становились решениями иерархии КП.

Например, обобщая формулу (2.4), для произвольного  $k \geq 1$  положим

$$w_k(\lambda) = \frac{1}{k} \sum \left( \left( \lambda_i - i + \frac{1}{2} \right)^k - \left( -i + \frac{1}{2} \right)^k \right).$$

Тогда ряд

$$H^\circ = \sum_{\lambda} e^{w_k(\lambda)u} s_{\lambda}(1, 0, \dots) s_{\lambda}(p). \quad (3.8)$$

принадлежит семейству Орлова–Щербина и тем самым является  $\tau$ -функцией иерархии КП.

Действительно, определим многочлен

$$D_k(x) = \frac{1}{k} \left( \left( x + \frac{1}{2} \right)^k - \left( x - \frac{1}{2} \right)^k \right).$$

Тогда мы имеем

$$w_k(\lambda) = \sum_{w \in \lambda} D_k(c(w)),$$

поэтому приведенный выше ряд является специализацией  $y_i = e^{uD_k(i)}$ ,  $i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ , семейства Орлова–Щербина.

**Определение 3.3.1.** *Пополненным  $k$ -циклом  $\overline{(k)}$  называется элемент центра  $Z\mathbb{C}[S_n]$  для произвольного  $n$ , собственное число которого в неприводимом представлении  $\lambda \vdash n$  равно  $w_k(\lambda)$ .*

В соответствии с этим определением коэффициенты Тейлора ряда (3.8), с точностью до несущественной перенормировки, совпадают с коэффициентами разложения степеней пополненного  $k$ -цикла по базису, состоящему из классов сопряженности. Пополненные циклы и отвечающий им вариант чисел Гурвица играют важную роль в эквивариантной теории Громова–Виттена проективной прямой [31], а также в теории  $k$ -спиновых расслоений на алгебраических кривых и обобщенной гипотезе Виттена.

Пополненные циклы полезно рассматривать в контексте так называемой алгебры Иванова–Керова, служащей «бесконечным пределом» алгебр  $Z\mathbb{C}[S_n]$  для всевозможных  $n$ . Рассмотрим множество, состоящее из счетного (или достаточно большого конечного) набора элементов. *Размеченной перестановкой* называется пара, состоящая из конечного подмножества и перестановки этого подмножества. Подмножество, участвующее в определении размеченной перестановки, называется ее *носителем*. На элементах, не принадлежащих носителю, перестановка действует тождественно, однако неподвижные элементы перестановки могут принадлежать также и носителю. Размеченные перестановки можно умножать. При умножении двух размеченных перестановок их носители объединяются, а сами перестановки, рассматриваемые уже как перестановки объединенного носителя, перемножаются. Относительно этого произведения множество размеченных перестановок образует полугруппу (это не группа, например, потому, что у нетривиальной перестановки нет обратной). Единицей в этой полугруппе служит тождественная перестановка пустого множества.

Для произвольного разбиения  $\lambda$  обозначим через  $(\lambda)$  элемент групповой алгебры полугруппы размеченных перестановок, представляющий собой сумму всех размеченных перестановок циклового типа  $\lambda$  с носителем, состоящим из  $|\lambda|$  элементов. Так, например,  $(2^1)$  — сумма всех транспозиций (у которых носителем является пара переставляемых транспозицией элементов), а  $(1^1 2^1)$  — также сумма всех транспозиций, но уже с 3-элементными

носителями, причем два из этих элементов переставляются транспозицией, а третий остается неподвижным.

Продemonстрируем преимущества алгебры Иванова–Керова перед центрами групповых алгебр симметрических групп. Скажем, квадрат класса транспозиции в алгебре  $Z\mathbb{C}[S_n]$  имеет следующее разложение по базисным элементам центра:

$$C_{2^1 1^{n-2}} C_{2^1 1^{n-2}} = 2C_{2^2 1^{n-4}} + 3C_{3^1 1^{n-3}} + \binom{n}{2} C_{1^n}.$$

Коэффициенты в правой части равенства — количества способов представить перестановку данного циклического типа в виде произведения пары транспозиций. То же равенства в групповой алгебре полугруппы размеченных перестановок приобретает вид

$$(2^1) (2^1) = 2(2^2) + 3(3^1) + (1^2).$$

Слагаемое  $(1^2)$  представляет тождественную перестановку с парой выделенных элементов — тех самых, которые были переставлены между собой дважды двумя транспозициями. Появляющийся в предыдущем разложении коэффициент  $\binom{n}{2}$ , равный в точности количеству способов выбрать пару выделенных элементов, в алгебре Иванова–Керова заменяется постоянным коэффициентом 1.

Аналогичным образом, произведение произвольных двух элементов вида  $(\lambda)$  раскладывается по базису из элементов того же вида, с постоянными, то есть не зависящими от мощности множества, на которых действуют размеченные перестановки, коэффициентами. Построенная алгебра с аддитивным базисом  $(\lambda)$  и называется *алгеброй Иванова–Керова* и обозначается через  $A$ . Алгебра  $A$  является коммутативной и ассоциативной.

Для всякого  $n$  имеется естественный гомоморфизм  $\psi_n : A \rightarrow Z\mathbb{C}[S_n]$  состоящий в забывании носителя. Более точно, мы полагаем

$$\psi_n(\lambda) = \binom{n - |\lambda| + m_1(\lambda)}{m_1(\lambda)} C_{\lambda 1^{n-|\lambda|}},$$

при  $|\lambda| \leq n$  и  $\psi_n(\lambda) = 0$  при  $|\lambda| > n$ ; здесь  $m_1(\lambda)$  — количество единиц в разбиении  $\lambda$ . Например,  $\psi_n(1^2) = \binom{n}{2} C_{1^n}$ .

Другой естественный гомоморфизм отображает алгебру  $A$  в пространство функций на диаграммах Юнга (разбиениях). А именно, значение функции  $w_a(\mu)$ , отвечающей элементу  $a \in A$ , на диаграмме Юнга  $\mu$  площади  $n = |\mu|$ , равно собственному числу действия элемента  $\psi_n(a) \in Z\mathbb{C}[S_n]$  в неприводимом представлении  $\mu$ . Иванов и Керов доказали, что этот гомоморфизм инъективный, а его образ состоит из *сдвинутых симметрических функций*, то есть симметрических функций от *сдвинутых частей*  $\mu_i - i$  разбиения  $\mu$ . Из этого результата вытекает, в частности, что *пополненные циклы являются элементами алгебры Иванова–Керова*: имеется универсальный элемент

$$\overline{(k)} = \sum_{\lambda} \rho_{k,\lambda} \cdot (\lambda),$$

образ которого в алгебре  $Z\mathbb{C}[S_n]$  является пополненным  $k$ -циклом для произвольного  $n$ . Более того, коэффициенты  $\rho_{k,\lambda}$  могут быть отличны от нуля только при  $|\lambda| + \ell(\lambda) \leq k + 1$  и для их производящего ряда имеется следующая явная формула [31]. Положим

$$\mathcal{S}(z) = \frac{e^{z/2} - e^{-z/2}}{z}.$$

Тогда для всякого разбиения  $\lambda$  мы имеем

$$\sum_k \frac{\rho_{k,\lambda}}{(k-1)!} z^k = z^{|\lambda|+\ell(\lambda)-1} \frac{\prod \lambda_i}{|\lambda|!} \mathcal{S}(z)^{|\lambda|-1} \prod \mathcal{S}(\lambda_i z).$$

Так, для малых  $k$ , применяя эту формулу, мы получаем,

$$\begin{aligned} \overline{(1)} &= (1^1), \\ \overline{(2)} &= (2^1), \\ \overline{(3)} &= (3^1) + (1^2) + \frac{1}{12}(1), \\ \overline{(4)} &= (4^1) + 2(2^1 1^1) + \frac{5}{4}(2). \end{aligned}$$

Алгебраическая структура алгебры Иванова–Керова достаточно проста: алгебра  $A$  изоморфна алгебре многочленов от счетного числа образующих. В качестве мультипликативных образующих можно взять, например, пополненные циклы. В другой интерпретации, алгебра  $A$  изоморфна алгебре симметрических функций (от неопределенного или бесконечного числа переменных). Образ симметрической функции в алгебре  $Z\mathbb{C}[S_n]$  равен значению этой симметрической функции на наборе элементов Юциса–Мерфи. В свою очередь, как функция на диаграммах Юнга симметрическая функция сопоставляет данной диаграмме Юнга значение этой функции на наборе содержаний диаграммы. Более точно, чтобы получить алгебру  $A$ , нужно к кольцу многочленов от элементарных симметрических функций добавить еще одну мультипликативную образующую,  $(1) = \overline{(1)}$ , действующую в  $Z\mathbb{C}[S_n]$  умножением на  $n$ .

## Глава 4

# Разветвленные накрытия сферы

Числа Гурвица не были для их изобретателя предметом абстрактного интереса. Они возникли как инструмент изучения римановых поверхностей, точнее — мероморфных функций на них. Каждая мероморфная функция на римановой поверхности представляет собой разветвленное накрытие двумерной сферы, а числа Гурвица и их разнообразные модификации перечисляют такие накрытия с предписанными данными ветвления.

### 4.1 Двумерные поверхности

*Двумерная поверхность* — это компактное двумерное многообразие (возможно, с краем). Если край пуст, то говорят, что поверхность *замкнута*.

Для каждой точки двумерной поверхности можно определить два различных направления вращения вокруг этой точки. Если во всех точках двумерной поверхности задано направление вращения, причем в близких точках направления вращения согласованы, то говорят, что на поверхности *задана ориентация*. Поверхность, на которой можно задать ориентацию, называют *ориентируемой*. Нетрудно убедиться в том, что плоскость  $\mathbb{R}^2$  ориентируема и что выкалывание нескольких точек не влияет на ориентируемость. Следовательно, сфера  $S^2$  ориентируема.

Нас будут интересовать только ориентируемые поверхности, потому что с топологической точки зрения гладкая комплексная кривая — это замкнутая ориентируемая поверхность.

*Связной суммой* двух поверхностей  $M$  и  $N$  называют поверхность  $M \# N$ , которая получается в результате вырезания из  $M$  и  $N$  малых открытых дисков  $D_1$  и  $D_2$  и приклейки  $M \setminus D_1$  к  $N \setminus D_2$  по гомеоморфизму  $h: \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$ . То, что остается после вырезания малого открытого диска  $D$  из тора  $S^1 \times S^1$ , называют *ручкой*.

Связную сумму  $g$  торов называют *сферой с  $g$  ручками* (сфера с нулем ручек это просто сфера  $S^2$ ). Любая замкнутая ориентируемая двумерная поверхность гомеоморфна сфере с  $g$  ручками (для некоторого  $g$ ), причем сферы с разным числом ручек не гомеоморфны. Сферы с  $g$  ручками для  $g = 0, 1, 2$  изображены на рис. 4.1. Упомянем также, что любая замкнутая неориентируемая поверхность гомеоморфна связной сумме нескольких экземпляров вещественной проективной плоскости  $\mathbb{R}P^2$ , причем связные суммы разного числа проективных плоскостей не гомеоморфны. По поводу доказательств теоремы о классификации двумерных поверхностей см., например, [?].

Рис. 4.1: Сферы с 0, 1, 2 ручками

## 4.2 Склейка двумерных поверхностей из многоугольников

Любую замкнутую двумерную поверхность можно *триангулировать*, т.е. разрезать на треугольники так, что любые два треугольника либо не имеют общих точек, либо имеют одну общую вершину, либо имеют одну общую сторону (общей не может быть часть стороны). Пусть  $V$  — число вершин,  $E$  — число ребер (сторон) и  $F$  — число граней данной триангуляции. Число  $V - E + F$ , называемое *эйлеровой характеристикой* данной поверхности  $M$ , не зависит от выбора триангуляции. Оно обозначается через  $\chi(M)$ . Эйлерова характеристика сферы с  $g$  ручками равна  $2 - 2g$ , а эйлерова характеристика связной суммы  $g$  вещественных проективных плоскостей равна  $2 - g$ .

Более общим образом, любую замкнутую двумерную поверхность можно склеить из многоугольников. При такой склейке каждая сторона многоугольника склеивается ровно с одной из сторон этого же или другого многоугольника, так что вершины склеиваются с вершинами. Склеенные попарно стороны многоугольников образуют граф на склеенной поверхности; вершинами этого графа служат склеенные вершины многоугольников. Внутренности многоугольников будем называть гранями вложенного графа. Формула Эйлера, выражающая эйлерову характеристику построенной таким образом поверхности через число вершин, ребер и граней графа, остается справедливой и для такой склейки.

Для того, чтобы получить ориентируемую (и ориентированную) поверхность, нужно ориентировать каждый из склеиваемых многоугольников и при склейке сторон соблюдать согласованность ориентации. Поскольку для каждой пары сторон есть лишь один способ склеить их так, чтобы ориентации были согласованы, каждая склейка однозначно определяется разбиением всех сторон всех многоугольников на непересекающиеся пары, см. рис. 4.2.



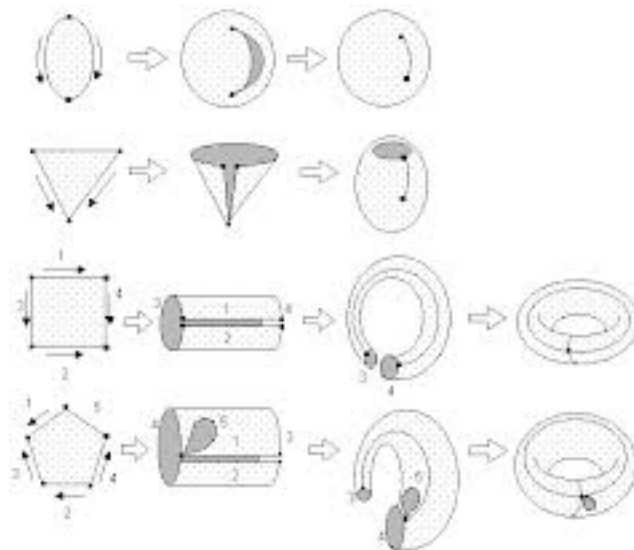


Рис. 4.2: Склейка поверхностей из многоугольников

Зачастую бывает удобно реализовывать поверхность данного рода склейкой сторон одного многоугольника. Минимальное число сторон у многоугольника, склейкой которого можно получить поверхность рода  $g$ , равно  $4g$ . При  $g > 1$  ориентируемую поверхность рода  $g$  из  $4g$ -угольника можно склеить несколькими способами. В качестве стандартной обычно берется склейка по схеме  $ababcdcd \dots$  (первая сторона склеивается с третьей, 2-я с 4-ой, 5-я с 7-ой и т.д.), см. рис. 4.3.

При стандартной склейке след многоугольника образует граф с одной вершиной,  $2g$  ребрами и одной гранью на получаемой поверхности. Поэтому эйлерова характеристика этой поверхности равна

$$V - E + F = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g,$$

т.е. ее род действительно равен  $g$ .

*Упражнение 4.2.1.* Пользуясь формулой Эйлера, докажите, что поверхность рода  $g$  нельзя склеить из многоугольника, у которого меньше, чем  $4g$  сторон.

*Упражнение 4.2.2.* Пользуясь формулой Эйлера, найдите род ориентируемой поверхности, склеенной из одного многоугольника по следующей схеме: а)  $abcabc$ ; б)  $abcdabcd$ ; в)  $abcdabdc$ .

*Упражнение 4.2.3.* Пользуясь формулой Эйлера, найдите род поверхности, получаемой в результате склейки многоугольников с рис. 4.2 по указанной там схеме.

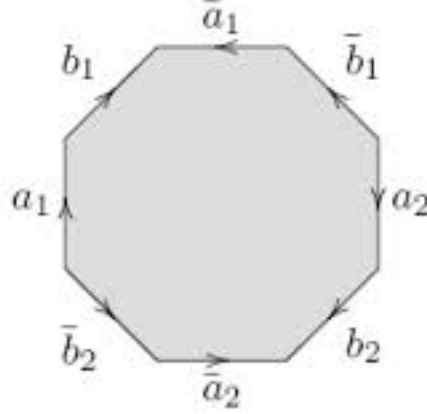


Рис. 4.3: Стандартная склейка ориентируемой поверхности рода  $g = 2$  из  $4g = 8$ -угольника

### 4.3 Накрытия

Непрерывное отображение  $p : M \rightarrow N$  двумерных поверхностей называют *накрытием*, если у каждой точки  $y$  поверхности  $N$  есть окрестность  $U = U(y) \subset N$ , прообраз которой при отображении  $p$  является несвязным объединением некоторого набора копий окрестности  $U$ , причем ограничение отображения  $p$  на каждую из копий есть гомеоморфизм.

Типичным примером накрытия служит отображение  $z \mapsto z^n$  проколото-го единичного диска  $|z| < 1, z \neq 0$  на комплексной прямой в себя.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что накрываемая поверхность  $N$  связна. В этом случае либо каждая точка поверхности  $N$  имеет бесконечно много прообразов, либо множество прообразов каждой точки конечно и число прообразов любых двух точек одинаково. Это общее число прообразов называется *степенью*, или *количеством листов*, накрытия. Если накрываемая поверхность ориентируема и на ней выбрана одна из двух ориентаций, то накрывающая поверхность также ориентируема, причем на ней определена ориентация, *индуцированная* с накрываемой поверхности.

*Упражнение 4.3.1.* Приведите пример накрытия  $p : M \rightarrow N$ , где поверхность  $M$  ориентируема, а поверхность  $N$  неориентируема.

**Теорема 4.3.2.** Пусть  $p : M \rightarrow N$  —  $n$ -листное накрытие, причем  $M$  и  $N$  — связные компактные двумерные поверхности. Тогда  $\chi(M) = n\chi(N)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим достаточно мелкую триангуляцию поверхности  $N$ . Тогда прообраз каждого треугольника этой триангуляции состоит из  $n$  попарно непересекающихся треугольников, причем в совокупности они образуют триангуляцию поверхности  $M$ . В полученной триангуляции поверхности  $M$  каждому треугольнику триангуляции поверхности  $N$  соответствует ровно  $n$  треугольников, каждому ребру — ровно  $n$  ребер, а каждой вершине — ровно  $n$  вершин. Следовательно,  $\chi(M) = n\chi(N)$ .  $\square$

*Упражнение 4.3.3.* Докажите, что сфера с  $g$  ручками покрывает сферу с  $h$  ручками тогда и только тогда, когда  $g - 1$  делится на  $h - 1$  (здесь  $g, h \geq 2$ ).

Накрытия тесно связаны с фундаментальными группами отображаемых поверхностей. Пусть  $y_0 \in N$  — произвольная точка; мы будем считать ее базисной точкой фундаментальной группы  $\pi_1(N, y_0)$ . Рассмотрим произвольное накрытие  $p : M \rightarrow N$  связной поверхностью и выберем какой-нибудь прообраз  $x_0 \in p^{-1}(y_0)$  точки  $y_0$ .

Пусть  $\gamma : [0, 1] \rightarrow N$  — произвольная непрерывная петля с началом и концом в точке  $y_0$ ,  $\gamma(0) = \gamma(1) = y_0$ . Возьмем какой-нибудь прообраз точки  $y_0$ . Тогда у петли  $\gamma$  имеется единственное непрерывное поднятие  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow M$ , начало которого  $\tilde{\gamma}(0)$  совпадает с выбранным прообразом, а  $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ . При этом конец  $\tilde{\gamma}(1)$  пути  $\tilde{\gamma}$  также является прообразом точки  $y_0$ , но он может и не совпадать с исходным. Он не зависит от выбора пути  $\gamma$  в данном гомотопическом классе замкнутых путей. Тем самым, каждому элементу фундаментальной группы  $\pi_1(N, y_0)$  сопоставляется некоторая перестановка — конечного или бесконечного — множества прообразов  $p^{-1}(x_0)$ : каждый прообраз отображается в конец поднятого пути с началом в этом прообразе. Это сопоставление задает действие фундаментальной группы на множестве прообразов. Это действие называется *монодромией* накрытия.

*Пример 4.3.4.* Рассмотрим в проколотом единичном диске  $D \setminus \{0\}$  путь  $\gamma$  с общим началом и концом  $y_0$ , обходящий вокруг прокола один раз в положительном направлении. При отображении проколотого единичного диска в себя  $f : z \mapsto z^n$  точка  $y_0$  имеет  $n$  прообразов, расположенных в вершинах правильного  $n$ -угольника с центром в точке  $0$ . Монодромия вдоль пути  $\gamma$  является циклической перестановкой вершин этого  $n$ -угольника — результатом его поворота на угол  $2\pi/n$  относительно центра.

*Упражнение 4.3.5.* Как выглядит монодромия того же отображения вдоль пути, дважды обходящего прокол в отрицательном направлении?

Элементы фундаментальной группы  $\pi_1(N, y_0)$ , задающие перестановки слоя  $p^{-1}(y_0)$ , оставляющие точку  $x_0 \in p^{-1}(y_0)$  неподвижной, образуют подгруппу в  $\pi_1(N, y_0)$ . Эта подгруппа изоморфна фундаментальной группе  $\pi_1(M, x_0)$  накрываемой поверхности. Можно доказать, что такое сопоставление устанавливает взаимно однозначное соответствие между подгруппами фундаментальной группы поверхности и классами эквивалентности ее накрытий. При этом два накрытия  $p_1 : M_1 \rightarrow N$  и  $p_2 : M_2 \rightarrow N$  мы считаем эквивалентными, если существует гомеоморфизм  $h : M_1 \rightarrow M_2$ , замыкающий коммутативный треугольник, т.е. такой, что  $p_2 \circ h = p_1$ .

В частности, фундаментальная группа проколотого диска изоморфна бесконечной циклической группе  $\mathbb{Z}$ . Ее подгруппы это подгруппы  $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ , состоящие из чисел, кратных данному натуральному числу  $n$ , а также нулевая подгруппа. Накрытия, отвечающие подгруппам конечного индекса, мы описали выше. Нулевой подгруппе соответствует накрытие, которое можно описать следующим образом. Накрывающая поверхность представляет собой горизонтальную полосу  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im } z < 1\}$  (которая, разумеется,

гомеоморфна диску) на комплексной прямой, а отображение есть экспоненциальное отображение  $z \mapsto e^{2\pi iz}$ . В этом случае накрывающая поверхность односвязна — ее фундаментальная группа тривиальна.

## 4.4 Разветвленные накрытия

Пусть у нас есть конечнолистное накрытие  $p : M \rightarrow N$  поверхности  $N$ , которая представляет собой результат выкалывания нескольких точек из некоторой связной поверхности  $\hat{N}$ . Построим поверхность  $\hat{M} \supset M$  добавлением нескольких точек к поверхности  $M$  и непрерывное отображение  $\hat{p} : \hat{M} \rightarrow \hat{N}$ , продолжающее отображение  $p$ , следующим образом. У каждой выколотой точки из  $\hat{N} \setminus N$  есть проколота окрестность, представляющая собой проколотый диск, такой, что его прообраз в  $M$  — несвязное объединение проколотых дисков, причем ограничение отображения  $p$  на каждый из этих прообразов эквивалентно отображению  $z \mapsto z^{n_i}$  при некоторых  $n_i$ . Заклеим каждый из этих дисков центральной точкой и продолжим отображение  $p$  по непрерывности в эту точку. Продолженное отображение называется *разветвленным накрытием* поверхности  $\hat{N}$ . Отметим, что разветвленное накрытие является накрытием только в том случае, если значения всех степеней  $n_i$  для всех выколотых точек равны 1.

В простейшей — и чрезвычайно важной — ситуации речь идет о конечнократных накрытиях проколотой сферы. Пусть поверхность  $N$  — это сфера  $S^2$ , из которой выколото конечное множество точек  $T = \{t_1, \dots, t_c\}$ . Возьмем какую-нибудь точку  $t_0 \in S^2 \setminus T$ . Число прообразов  $|f^{-1}(t_0)|$  этой точки — степень накрытия  $f$  — обозначим через  $d$ . Соединим точку  $t_0$  с каждой из точек  $t_i$  несамопересекающимся отрезком гладкой кривой, не проходящим через точки  $t_j$  для  $j \neq i$ . Такому отрезку можно сопоставить путь  $\gamma_i$ , который идет от  $t_0$  к  $t_i$  вдоль выбранного отрезка, затем обходит вокруг точки  $t_i$  против часовой стрелки, затем возвращается вдоль выбранного отрезка в точку  $t_0$ . Выполним теперь это действие с каждым из проколов  $t_i$ , следя за тем, чтобы

- отрезки, идущие в проколотые точки, пересекались попарно лишь в базисной точке  $t_0$ ;
- циклический порядок, в котором отрезки выходят из точки  $t_0$ , совпадал бы с порядком нумерации проколотых точек.

В результате получим граф-звезду на  $S^2$  с центром в точке  $t_0$  и лучами, идущими из  $t_0$  в  $t_i$  (см. рис. 4.4).

*Упражнение 4.4.1.* Что из себя представляет фундаментальная группа сферы  $S^2$ , проколотой в  $c$  точках?

Тем самым мы построили набор перестановок  $\sigma_1, \dots, \sigma_c$  на прообразе  $f^{-1}(t_0) \in Y$ , обладающий следующими свойствами:

- подгруппа в  $S_d$ , группе перестановок прообразов точки  $t_0$ , порожденная перестановками  $\sigma_1, \dots, \sigma_c$ , действует на слое *транзитивно*, т.е.

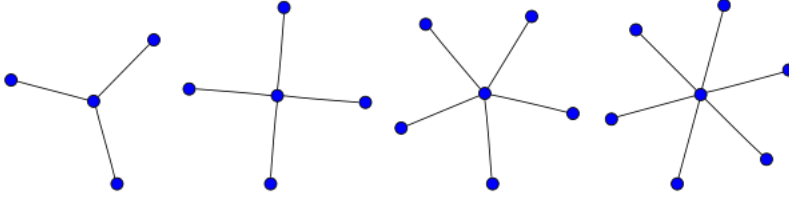


Рис. 4.4: Граф-звезда

для любой пары точек в прообразе есть перестановка из подгруппы, переводящая первую точку во вторую;

- последовательное произведение  $\sigma_c \circ \dots \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$  всех этих перестановок является тождественной перестановкой.

*Упражнение 4.4.2.* Докажите эти свойства.

*Упражнение 4.4.3.* Докажите, что для любого набора точек  $T = \{t_1, \dots, t_c\}$  на сфере, любой звезды на этих точках и любого набора перестановок  $\sigma_1, \dots, \sigma_c$ , обладающих двумя приведенными выше свойствами, существует накрытие  $Y \rightarrow S^2 \setminus T$ , монодромия которого вдоль пути  $\gamma_i$  совпадает с  $\sigma_i$ . Это накрытие единственно, т.е. для двух таких накрытий  $f_1 : Y_1 \rightarrow S^2$ ,  $f_2 : Y_2 \rightarrow S^2$  существует такой гомеоморфизм  $h : Y_1 \rightarrow Y_2$ , что  $f_2 = h \circ f_1$ .

*Упражнение 4.4.4.* Проверьте, что цикловой тип (т.е. количество циклов и набор их длин) перестановки  $\sigma_i$  не зависит от выбора базисной точки  $t_0$  и пути, соединяющего ее с  $t_i$ .

*Упражнение 4.4.5.* Пусть накрываемая поверхность представляет собой не сферу, а проколотую поверхность более высокого рода. Как нужно изменить понятия звезды и набора перестановок, чтобы накрываемая поверхность по-прежнему восстанавливалась однозначно?

## 4.5 Формула Римана–Гурвица

Эйлерова характеристика накрываемой поверхности выражается простой формулой через эйлерову характеристику накрываемой поверхности и степень накрытия. Для разветвленных накрытий формула оказывается более сложной — в нее входят характеристики ветвления.

**Теорема 4.5.1** (Риман–Гурвиц). Пусть  $p : M \rightarrow N$  —  $n$ -листное разветвленное накрытие с  $k$  точками ветвления, причем точки ветвления имеют  $m_1, \dots, m_k$  прообразов. Тогда

$$\chi(M) = n(\chi(N) - k) + m_1 + \dots + m_k.$$

*Доказательство.* Разобьем поверхность  $N$  на два замкнутых множества:  $N = N_A \cup N_B$ , где  $N_A$  — объединение замыканий маленьких круговых окрестностей точек ветвления,  $N_B$  — замыкание дополнения  $N \setminus N_A$  к  $N_A$ . Тогда

$$\chi(N) = \chi(N_A) + \chi(N_B) - \chi(N_A \cap N_B).$$

Но множество  $N_A \cap N_B$  состоит из нескольких окружностей, поэтому  $\chi(N_A \cap N_B) = 0$ . Следовательно,

$$\chi(N) = A_N + B_N, \text{ где } A_N = \chi(N_A), B_N = \chi(N_B).$$

Аналогично разобьем поверхность  $M$  на замкнутые множества  $M_A = p^{-1}(N_A)$  и  $M_B = p^{-1}(N_B)$ . В результате получим

$$\chi(M) = A_M + B_M, \text{ где } A_M = \chi(M_A), B_M = \chi(M_B).$$

Ограничение отображения  $p$  на множество  $M_B$  является накрытием, поэтому  $B_M = nB_N$ , а значит,

$$\chi(M) - A_M = n(\chi(N) - A_N).$$

Множество  $M_A$  состоит из  $m_1 + \dots + m_k$  непересекающихся кругов, а множество  $N_A$  состоит из  $k$  непересекающихся кругов. Ясно также, что эйлерова характеристика круга равна 1. Поэтому  $A_M = m_1 + \dots + m_k$  и  $A_N = k$ .  $\square$

Вот еще одно доказательство формулы Римана–Гурвица.

*Доказательство.* Рассмотрим достаточно мелкую триангуляцию поверхности  $N$ , такую, что все точки ветвления являются ее вершинами (у триангуляции могут быть и другие вершины). Слова “достаточно мелкая” здесь означают, что прообраз внутренней каждого треугольника триангуляции состоит из внутренних треугольников, число которых равно степени  $n$  накрытия, и то же самое верно для прообразов внутренних ребер. Над внутренней частью каждого треугольника триангуляции и над внутренней частью каждого ее ребра отображение  $p$  является неразветвленным накрытием. Поэтому прообразы ребер и треугольников триангуляции поверхности  $N$  при отображении  $p$  образуют индуцированную триангуляцию поверхности  $M$ . Пусть  $v_N, e_N$  и  $f_N$  — соответственно число вершин, ребер и граней триангуляции поверхности  $N$ , а  $v_M, e_M$  и  $f_M$  — соответственно число вершин, ребер и граней индуцированной триангуляции поверхности  $M$ . Тогда  $e_M = ne_N$ ,  $f_M = nf_N$  и  $v_M = n(v_N - k) + \sum m_i$ , откуда

$$\chi(M) = v_M - e_M + f_M = n\chi(N) - nk + \sum m_i,$$

что и требовалось. В этом рассуждении триангуляцию можно заменить произвольным достаточно мелким разбиением поверхности  $N$  на многоугольники.  $\square$

Формулу Римана–Гурвица можно переписать в другом виде, часто более удобном для приложений. При этом используется не информация о ветвлении над поверхностью-образом  $N$ , а информация о ветвлении на поверхности-прообразе  $M$ . Если в малой окрестности точки  $x_0 \in M$  в некоторых локальных комплексных координатах отображение  $p$  устроено как  $z \mapsto z^d$ , то говорят, что эта точка имеет *индекс ветвления*  $d$  (почти во всех точках индекс ветвления равен 1). Пусть  $d_1, \dots, d_{m_1}$  — индексы ветвления над первой точкой ветвления,  $d_{m_1+1}, \dots, d_{m_1+m_2}$  — индексы ветвления над второй точкой ветвления и т.д. Тогда

$$d_1 + \dots + d_{m_1} = d_{m_1+1} + \dots + d_{m_1+m_2} = \dots = n.$$

Пусть  $x_1, \dots, x_l$  — точки, из которых состоят прообразы всех точек ветвления. Тогда

$$\sum_{i=1}^l (d_i - 1) = (n - m_1) + (n - m_2) + \dots = kn - (m_1 + m_2 + \dots + m_k).$$

Поэтому формулу Римана–Гурвица можно переписать в виде

$$\chi(M) = n\chi(N) - \sum (d_i - 1); \quad (4.1)$$

здесь можно считать, что суммирование ведется по всем точкам поверхности  $M$ , индекс ветвления которых отличен от 1.

Непосредственно из формулы (4.1) следуют утверждения, сформулированные в упражнениях 4.5.2–4.5.4.

*Упражнение 4.5.2.* Докажите, что любое разветвленное накрытие тора тором является на самом деле неразветвленным, т.е. индекс ветвления любой точки равен 1.

*Упражнение 4.5.3.* Пусть  $p : M \rightarrow N$  — разветвленное накрытие ориентируемых поверхностей. Докажите, что  $\chi(M) \leq \chi(N)$ .

*Упражнение 4.5.4.* Пусть  $p : M \rightarrow N$  — разветвленное накрытие ориентируемых поверхностей. Докажите, что если  $\chi(M) = \chi(N) < 0$ , то отображение  $p$  — изоморфизм.

## 4.6 Перечисление разветвленных накрытий сферы

Пусть  $f : M \rightarrow S^2$  — разветвленное накрытие сферы  $S^2$  связной поверхностью  $M$ , и пусть  $t_1, \dots, t_m \in S^2$  — точки, над которыми отображение  $f$  ветвится. Выберем в сфере произвольное некритическое значение  $t_0$  отображения  $f$  и соединим его последовательно простыми дугами с точками  $t_1, t_2, \dots, t_m$  так, чтобы получился граф-звезда на сфере. Как мы видели, этому графу сопоставляется набор из  $m$  перестановок  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  множества прообразов

$f^{-1}(t_0)$ , произведение которых  $\sigma_m \circ \dots \circ \sigma_1$  есть тождественная перестановка. Зафиксируем теперь циклический тип  $\mu_1, \dots, \mu_m$  каждой из перестановок  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ . Отметим, что формула Римана–Гурвица позволяет восстановить род  $g$  накрываемой поверхности  $M$  по набору циклических типов перестановок  $\sigma_i$ .

*Задача Гурвица* состоит в следующем:

*Чему равно количество разветвленных накрытий сферы связной поверхностью рода  $g$  с данными циклическими типами ветвления  $\mu_1, \dots, \mu_m$  над заданными точками  $t_1, \dots, t_m \in S^2$ ?*

Эта формулировка задачи требует уточнения. Во-первых, мы считаем два разветвленных накрытия  $f_1 : M_1 \rightarrow S^2$  и  $f_2 : M_2 \rightarrow S^2$  совпадающими, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм  $h : M_1 \rightarrow M_2$ , такой, что  $f_1 = f_2 \circ h$ . Во-вторых, разветвленные накрытия в задаче Гурвица перечисляются с весом, обратным порядку группы автоморфизмов накрытия. Теперь мы можем дать строгое определение.

**Определение 4.6.1.** Связным числом Гурвица, отвечающим набору  $(\mu_1, \dots, \mu_m)$  разбиений данного числа  $d$ , называется сумма

$$\sum_{f: M \rightarrow S^2} \frac{1}{|\text{Aut}(f)|},$$

где суммирование ведется по всем связным разветвленным накрытиям  $f : M \rightarrow S^2$  степени  $d$  с предписанными типами ветвлений  $\mu_1, \dots, \mu_m$  над заданными точками  $t_1, \dots, t_m \in S^2$ , не имеющим других ветвлений.

Такое число Гурвица равно величине

$$\frac{1}{d!} |\{(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \mid \sigma_i \in C_{\mu_i} \subset S_d, \sigma_m \circ \dots \circ \sigma_1 = \text{id}, \\ \langle \sigma_1, \dots, \sigma_m \rangle \text{ действует транзитивно.}\}|$$

В частности, связные простые числа Гурвица  $h_{m;\mu}$  перечисляют связные разветвленные накрытия сферы  $S^2$ , для которых ветвление над одной точкой имеет циклический тип  $\mu$ , и является простым еще над  $m$  точками.

Теперь становится понятен смысл прилагательного “связное” в определении простых чисел Гурвица — оно обязано своему происхождению условию связности накрываемой поверхности. Конечно, это требование можно отменить, и рассматривать все накрытия сферы, как связные, так и несвязные. Кроме того, можно перечислять разветвленные накрытия, удовлетворяющие другим дополнительным ограничениям, отличным от требования простоты ветвления.

Отметим, что если мы задали на сфере  $S^2$  комплексную структуру, превращающую ее в комплексную проективную прямую  $\mathbb{C}P^1$ , то эта комплексная структура однозначно поднимается до комплексной структуры на поверхности  $M$ , причем в результате отображение  $f$  становится мероморфной



функцией. Поэтому перечисление задачи перечисления разветвленных накрытий сферы и мероморфных функций на комплексных кривых изоморфны между собой.

Интерпретация подсчета чисел Гурвица как перечисления мероморфных функций на комплексных кривых позволяет говорить о них как об инвариантах Громова–Виттена сферы (или комплексной проективной прямой). Более общим образом, инварианты Громова–Виттена комплексного многообразия  $X$  перечисляют голоморфные отображения в  $X$  комплексных алгебраических кривых, удовлетворяющие некоторым ограничениям. При этом ограничения выбираются таким образом, чтобы множество удовлетворяющих им отображений было конечным, и сами отображения считаются с весом, обратным порядку их группы автоморфизмов. Так, в случае чисел Гурвица, мы фиксируем точек ветвления в проективной прямой и степень накрытия, что делает множество отображений конечным.

Производящая функция для связанных простых чисел Гурвица удовлетворяет иерархии Кадомцева–Петвиашвили. Производящие функции инвариантов Громова–Виттена других комплексных многообразий могут иметь другую природу. Так, производящие функции, перечисляющие разветвленные накрытия двумерного тора (голоморфные отображения комплексных кривых в эллиптические кривые), представляют собой квазимодулярные функции [10].

## 4.7 Геометрия формулы Кэли

Интерпретируя подсчет чисел Гурвица как перечисление мероморфных функций с заданными порядками ветвлений и фиксированными критическими значениями, мы получаем возможность использовать средства алгебраической геометрии для их вычисления. В качестве простейшего примера рассмотрим задачу о разложении длинной (состоящей из единственного цикла) перестановки в виде произведения минимального числа транспозиций. Другими словами, речь идет о вычислении числа Гурвица  $h_{n-1, n^1}$ .

Мероморфная функция степени  $n$ , имеющая  $n - 1$  точку простого ветвления и одну точку полного ветвления является рациональной, т.е. отображением  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . Выбрав координату в проективной прямой-прообразе таким образом, чтобы точка полного ветвления имела координату  $\infty$ , мы превращаем нашу функцию в многочлен степени  $n$ . Поскольку все критические значения этого многочлена просты, он является общим (т.е. морсовским).

Обозначим через  $\mathcal{P}_n$  пространство многочленов степени  $n$  со старшим коэффициентом 1 и следующим коэффициентом равным 0,

$$\mathcal{P}_n = \{z^n + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n\} \cong \mathbb{C}^{n-1}.$$

Общие многочлены образуют открытое плотное подмножество в этом пространстве.

Пусть  $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$  — набор конечных точек в проективной-прямой образе. Рассмотрим граф-звезду  $St$  с центром  $t_0$  на этом наборе, и пусть  $p : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  — многочлен степени  $n$  с критическими значениями  $t_1, \dots, t_{n-1}$ . В полном прообразе  $p^{-1}(St)$  выберем те дуги, которые соединяют прообразы  $p^{-1}(t_0)$  точки  $t_0$  с критическими точками многочлена  $p$  (и не будем обращать внимание на дуги, соединяющие точки из  $p^{-1}(t_0)$  с некритическими прообразами). Граф в проективной прямой-прообразе, вершинами которого служат прообразы  $p^{-1}(t_0)$ , а ребрами — пары дуг, соединяющих критические точки многочлена  $p$  с этими прообразами, является деревом. Действительно, он связный, содержит  $n$  вершин и  $n - 1$  ребер. Кроме того, у него занумерованы ребра.

Подсчет числа многочленов с данным набором  $n - 1$  простых критических значений это то же самое, что подсчет степени отображения, сопоставляющего многочлену набор его критических значений (т.е., многочлен степени  $n - 1$  со старшим коэффициентом 1, корнями которого являются  $n - 1$  критических значений данного многочлена). Это отображение

$$z^n + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n \mapsto t^{n-1} + b_1 t^{n-2} + \dots + b_{n-1}$$

продолжается до полиномиального отображения

$$\mathbb{L}_n : \mathcal{P}_n \equiv \mathbb{C}^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}^{n-1},$$

называемого *отображением Ляшко–Лойенги*. Его можно задать формулой

$$\mathbb{L}_n : p(z) \mapsto \underset{z}{\text{Discrim}}(p(z) - t).$$

Для вычисления интересующего нас числа Гурвица надо найти степень отображения Ляшко–Лойенги.

Заметим теперь, что отображение  $\mathbb{L}$  квазиоднородно: умножение многочлена  $p$  на константу  $\lambda \neq 0$  приводит к умножению всех конечных критических значений многочлена  $p$  на  $\lambda$ . Степень всякого собственного квазиоднородного отображения равна отношению произведения показателей квазиоднородности в образе и прообразе, поэтому

$$\deg \mathbb{L}_n = \frac{1 \cdot n \cdot 2 \cdot n \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} = n^{n-2}.$$

Собственность отображения  $\mathbb{L}$  равносильно условию  $\mathbb{L}^{-1}(0) = 0$ , которое проверяется непосредственно. Для окончательного подсчета числа Гурвица осталось заметить, что операция  $a_k \mapsto a_k \varepsilon_n^k$ , где  $\varepsilon_n$  — примитивный корень степени  $n$  из единицы,  $k = 2, \dots, n$ , не меняет критических значений многочлена, откуда

$$h_{n-1;n^1} = n^{n-3}$$

в согласии с нашими предыдущими вычислениями.

## 4.8 Тригонометрические (лорановские) многочлены

Здесь мы, следуя Арнольду [1], применим метод предыдущего пункта для вычисления чисел Гурвица  $h_{k+n, k^1 n^1}$ . Согласно формуле Римана–Гурвица, числа такого вида перечисляют рациональные разветвленные накрытия сферы  $\mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$  степени  $k+n$  с двумя прообразами точки  $\infty$  с ветвлениями порядков  $k$  и  $n$ , соответственно, и  $k+n$  простыми точками ветвления. Выберем координату на кривой накрытия таким образом, чтобы прообразами точки  $\infty$  служили точки  $0$  и  $\infty$ , соответственно. В этой координате мероморфная функция, задающая накрытие, приобретает вид многочлена Лорана. Число Гурвица можно определить как степень подходящего отображения Ляшко–Лойенги. Чтобы реализовать этот подход, нужно предъявить подходящее пространство многочленов Лорана, на котором отображение Ляшко–Лойенги было бы корректно определено, полиномиально, квазиоднородно и собственное. Тогда его степень равнялась бы отношению произведений степеней переменных в образе и прообразе.

В качестве пространства многочленов Лорана возьмем пространство  $\mathbb{C}^{k+n}$  параметров  $a_1, \dots, a_{k-1}, b_1, \dots, b_{n-1}, c, \epsilon$  следующего семейства функций

$$x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_{k-1} x + c + b_{n-1} y + \dots + b_1 y^{n-1} + y^n,$$

в ограничении на плоскую кривую, заданную уравнением  $xy = \epsilon$ . При  $\epsilon \neq 0$  эта кривая гладкая и рациональная (изоморфна  $\mathbb{C}P^1$ ), в качестве аффинной координаты на которой можно выбрать либо  $x$ , либо  $y = \epsilon/x$ . В обеих координатах функция семейства принимает вид многочлена Лорана. При  $\epsilon = 0$  кривая области определения функции сама становится особой. Она состоит из двух компонент, изоморфных  $\mathbb{C}P^1$ , пересекающихся по точке. Ограничения функции на эти компоненты являются многочленами степеней  $k$  и  $n$  соответственно.

Отображение Ляшко–Лойенги  $\mathbb{L}_{k,n} : \mathbb{C}^{k+n} \rightarrow \mathbb{C}^{k+n}$  для общих значений параметров сопоставляет функции неупорядоченный набор ее  $k+n$  критических значений, собранных в виде корней многочлена  $t^{k+n} + d_1 t^{k+n-1} + \dots + d_{k+n}$ . Нетрудно показать, что построенное отображение продолжается на все пространство параметров как полиномиальное квазиоднородное собственное отображение. Веса переменных этого квазиоднородного отображения следующие:

$$\deg a_i = n i, \quad \deg b_j = k j, \quad \deg c = k n, \quad \deg \epsilon = k + n, \quad \deg d_i = k n i.$$

По формуле степени квазиоднородного отображения находим

$$\deg \mathbb{L}_{k,n} = \frac{(k n)^{k+n} (k+n)!}{n^{k-1} (k-1)! k^{n-1} (n-1)! k n (k+n)} = \frac{(k+n-1)! k^{k+1} n^{n+1}}{k! n!}.$$

Заметим теперь, функция из нашего семейства определяется разветвленным накрытием неоднозначно. Имеется свобода в умножении координат  $x$

и  $y$  на корень степеней  $k$  и  $n$  из единицы, соответственно, и, возможно, обмен координат  $x$  и  $y$ , в случае если  $k = n$ . Поэтому

$$\deg \mathbb{L}_{k,n} = kn |\mathrm{Aut}(k, n)| h_{k+n; k^1 n^1}.$$

Собирая вместе, находим, окончательно

$$h_{k+n; k^1 n^1} = \frac{(k+n-1)! k^k n^n}{|\mathrm{Aut}(k, n)| k! n!}$$

что согласуется с формулой Гурвица. Любопытно отметить, что попытки построить пространство многочленов Лорана, состоящее только из функций на гладких кривых, не приводит к успеху: отображение Ляшко–Лойенги в этих случаях либо не является корректно определенным, либо не является собственным.

## 4.9 Разложение по родам

Логарифм  $H(u; p_1, p_2, \dots)$   $\tau$ -функции  $H^\circ$  перечисляет связные разветвленные накрытия. В случае связного разветвленного накрытия проективной прямой с ветвлением циклового типа  $\mu$  над одной точкой и простыми ветвлениями над  $t$  другими точками формула Римана–Гурвица для рода  $g$  накрываемой поверхности принимает вид

$$2g - 2 = t - |\mu| - \ell(\mu). \quad (4.2)$$

В частности, при заданном разбиении  $\mu$ , минимально возможное для получения связного накрытия число транспозиций равно

$$t = |\mu| + \ell(\mu) - 2,$$

и в этом случае накрываемая поверхность также имеет род 0. Тем самым, формула Гурвица дает значение для связных простых чисел Гурвица нулевого рода, что лишней раз подчеркивает ее важность.

Равенство (4.2) подсказывает, как явно выделить эйлерову характеристику связной накрываемой поверхности в производящей функции (а значит, и род этой поверхности): всякая дополнительная точка простого ветвления должна добавлять единицу в степень параметра, отвечающего за этот род, а часть длины  $i$  в разбиении  $\mu$  должна уменьшать эту степень на  $i + 1$ . Как результат, мы должны сделать замену переменных  $p_i \mapsto \hbar^{-i-1} p_i$ , что приводит к деформации функций Шура,

$$s_\lambda^{\hbar}(p_1, p_2, \dots) = s_\lambda \left( \frac{p_1}{\hbar^2}, \frac{p_2}{\hbar^3}, \frac{p_3}{\hbar^4}, \dots \right),$$

и положить  $y_c = e^{u\hbar c}$  в параметрах семейства Орлова–Щербина. Тогда производящая функция для связных чисел Гурвица приобретет вид разложе-

ния по родам

$$\begin{aligned} H^{\hbar}(u; p_1, p_2, \dots) &= \hbar^2 \log \left( \sum_{\mu} \prod_{w \in \nu} e^{u\hbar c(w)} \frac{\dim_{\mu}}{|\mu|!} s_{\mu}^{\hbar}(p_1, p_2, \dots) \right) \\ &= H_0(u; p_1, p_2, \dots) + \hbar^2 H_1(u; p_1, p_2, \dots) + \hbar^4 H_2(u; p_1, p_2, \dots) + \dots, \end{aligned}$$

где функция  $H_g$ ,  $g = 0, 1, 2, \dots$ , перечисляет разветвленные накрытия рода  $g$ . В свою очередь, иерархия уравнений КП также продеформируется. В частности, первое уравнение КП (3.1) на продеформированную функцию приобретает вид

$$\frac{\partial^2 H^{\hbar}}{\partial p_2^2} = \frac{\partial^2 H^{\hbar}}{\partial p_1 \partial p_3} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 H^{\hbar}}{\partial p_1^2} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{12} \frac{\partial^4 H^{\hbar}}{\partial p_1^4}$$

(мы пользуемся равенством  $H^{\hbar}(u; p_1, p_2, \dots) = \hbar^2 H(\hbar u; p_1/\hbar^2, p_2/\hbar^3, \dots)$ ). Это означает, например, что производящая функция  $H_0$  для связных чисел Гурвица рода 0 является решением *бездисперсионного уравнения КП*:

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_2^2} = \frac{\partial^2 H_0}{\partial p_1 \partial p_3} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 H_0}{\partial p_1^2} \right)^2.$$

Следующий член разложения по степеням параметра  $\hbar$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial p_2^2} = \frac{\partial^2 H_1}{\partial p_1 \partial p_3} - \frac{\partial^2 H_0}{\partial p_1^2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial p_1^2} - \frac{1}{12} \frac{\partial^4 H_0}{\partial p_1^4},$$

которое, в отличие от исходного уравнения КП, линейно относительно неизвестной функции  $H_1$ . Поэтому, зная член разложения нулевого рода  $H_0$ , следующий член разложения  $H_1$  можно найти стандартными методами теории линейных дифференциальных уравнений. То же самое справедливо и для всех старших родов.

Для случая чисел Гурвица член нулевого рода  $H_0$  известен со времен Гурвица. Его коэффициенты имеют вид

$$h_{m;\mu} = |\mu|^{\ell(\mu)-3} \frac{m!}{|\text{Aut}(\mu)|} \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} \frac{\mu_i^{\mu_i}}{\mu_i!}, \quad m = |\mu| + \ell(\mu) - 2.$$

Аналогично случаю обычных чисел Гурвица, все остальные их вариации также интерпретируются как числа разветвленных накрытий сферы с заданными ограничениями на типы ветвления в заданных точках. При этом условие транзитивности действия группы, порожденной перестановками, участвующими в произведении, эквивалентно условию связности поверхности накрытия. Род этой поверхности определяется данными ветвления по формуле Римана–Гурвица и может быть выделен явно подходящей перенормировкой параметров. Более того, мы можем ввести понятие разложения по родам для произвольных решений иерархии КП, принадлежащих семейству Орлова–Щербина.

Пусть

$$\varphi(c) = d_0 + d_1 c + d_2 c^2 + d_3 c^3 + \dots \quad (4.3)$$

произвольный степенной ряд.

**Определение 4.9.1.** Разложением по родам  $\tau$ -функции иерархии КП, получаемой из функции семейства Орлова–Щербина

$$\sum_{\mu} y_{\mu} \frac{\dim_{\mu}}{|\mu|!} s_{\mu}(p_1, p_2, \dots),$$

подстановкой  $y_c = \varphi(c)$ ,  $c = \dots, -2, -1, 0, 1, 2$ , называется функция

$$\sum_{\mu} \prod_{w \in \mu} \varphi(\hbar c(w)) \frac{\dim_{\mu}}{|\mu|!} s_{\mu}^{\hbar}(p_1, p_2, \dots).$$

Докажем, что это определение корректно.

**Теорема 4.9.2.** Для любого степенного ряда (4.3) разложение по степеням параметра  $\hbar$  функции

$$\Phi^{\hbar}(p_1, p_2, \dots) = \hbar^2 \log \sum_{\mu} \prod_{w \in \mu} \varphi(\hbar c(w)) \frac{\dim_{\mu}}{|\mu|!} s_{\mu}^{\hbar}(p_1, p_2, \dots)$$

содержит только четные неотрицательные степени параметра  $\hbar$ .

Тем самым, действительно имеет смысл говорить о роде каждого монома в степенном разложении.

По-видимому, сформулированная теорема допускает непосредственное доказательство, не привязанное к разветвленным накрытиям сферы. Для случая простых чисел Гурвица этот факт вытекает из уравнения транспозиции (1.4). Если подставить в него  $H^{\circ} = \hbar^{-2} \log(H)$ , то, с учетом вставки параметра  $\hbar$  разложения по родам, оно приобретает вид следующего соотношения на функцию  $H$ .

$$\frac{\partial H^{\hbar}}{\partial u} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i+j=n} \left( (i+j)p_i p_j \frac{\partial H^{\hbar}}{\partial p_{i+j}} + i j p_{i+j} \left( \frac{\partial H^{\hbar}}{\partial p_i} \frac{\partial H^{\hbar}}{\partial p_j} + \hbar^2 \frac{\partial^2 H^{\hbar}}{\partial p_i \partial p_j} \right) \right).$$

С учетом начальных данных  $H^{\hbar}|_{u=0} = p_1$  мы получаем по индукции, что коэффициент при каждой степени переменной  $u$  в ряду  $H^{\hbar}$  является многочленом от  $p_1, p_2, \dots$  и  $\hbar^2$ .

В случае же общего решения  $\Phi^{\hbar}$  Орлова–Щербина мы, однако, воспользуемся результатом Харнада [18], который интерпретирует функцию  $\Phi^{\hbar}$  как производящую функцию для количества разветвленных накрытий сферы связными поверхностями, подсчитанных с весами. Рассмотрим (не строго) монотонное разложение перестановки  $n$ -элементного множества в произведение транспозиций

$$(i_1, j_1)(i_2, j_2) \cdots (i_m, j_m), \quad i_k < j_k, \quad j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_m.$$

Весом такой перестановки будем называть моном  $d_{k_1} \cdots d_{k_n}$  от формальных переменных  $d_0, d_1, \dots$ ; здесь  $k_s$  это число тех транспозиций в разложении, второй (т.е. больший) переставляемый элемент в которых равен  $s$ . В частности, общее число транспозиций в разложении равно  $m = k_1 + \cdots + k_n$ . Тогда  $\tau$ -функция в определении 4.9.1 является производящей функцией для количества нестрого монотонных разложений, подсчитанных с весами, а функция  $\Phi^{\hbar}$  из условия теоремы является производящей функцией для аналогичных разложений, удовлетворяющих условию транзитивности. Степень переменной  $\hbar$  в каждом мономе в  $\Phi^{\hbar}$  вдвое больше рода накрывающей поверхности, определяемого по разложению. Действительно, рассмотрим произведение

$$\varphi(X_1)\varphi(X_2)\cdots\varphi(X_n)$$

(как элемент кольца  $ZCS_n[[d_0, d_1, \dots]]$ ), где  $X_1, \dots, X_n$  это элементы Юциса–Мерфи. Тогда, как легко видеть, это произведение является суммой всех нестрого монотонных разложений в произведение транспозиций в группе  $S_n$  (при данном  $n$ ), взятых с коэффициентами, равными весам соответствующих разложений. Из этого замечания теорема Ги–Паке–Харнада вытекает аналогично приведенным выше доказательствам теорем ??, ?? и ??

*Пример 4.9.3.* Производящая функция  $B_m$  для связанных чисел Буске–Мелу–Шеффера отвечает набору параметров  $y_c = (1 + uc)^m$  в семействе Орлова–Щербина. Для получения ее разложения по родам  $B_m^{\hbar}$  нужно заменить эти параметры на  $y_c = (1 + u\hbar c)^m$ :

$$B_m^{\hbar} = \hbar^2 \log \sum_{\mu} \prod_{w \in \mu} (1 + u\hbar c(w))^m \frac{\dim_{\mu}}{|\mu|!} s_{\mu}^{\hbar}(p_1, p_2, \dots).$$

Коэффициенты этой функции перечисляют связанные накрытия проективной прямой поверхностью заданного рода с фиксированными точками ветвления, над одной из которых ветвление имеет заданный цикловой тип  $\mu$ , а все остальные точки ветвления находятся среди оставшихся  $m$  точек и типы ветвления над ними могут быть произвольными. Теперь формула Буске–Мелу–Шеффера в [7] интерпретируется как формула для количества накрытий нулевого рода:

$$b_{m,k,\mu} = \frac{m(m|\mu| - k + 1)^{\overline{\ell(\mu) - 3}}}{|\text{Aut}(\mu)|} \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} \binom{m\mu_i - 1}{\mu_i}, \quad k = |\mu| + \ell(\mu) - 2,$$

где через

$$(d + 1)^{\overline{r}} = (d + 1)(d + 2) \cdots (d + r)$$

обозначено восходящее произведение  $r$  сомножителей, и где для  $r < 0$  мы полагаем

$$(d + 1)^{\overline{r}} = \frac{1}{(d + r + 1)^{\overline{-r}}}.$$

*Пример 4.9.4.* Для монотонных чисел Гурвица разложение по родам имеет вид

$$\vec{H}^{\hbar} = \hbar^2 \log \sum_{\mu} \prod_{w \in \mu} \frac{1}{1 - u\hbar c(w)} \frac{\dim_{\mu}}{|\mu|!} s_{\mu}^{\hbar}(p_1, p_2, \dots).$$

Формула для монотонных чисел Гурвица рода 0 получена в [13]. С точностью до знака  $(-1)^m$  она получается формальной подстановкой  $m = -1$ ,  $k = m$  в приведенную выше формулу для чисел Буске-Мелу-Шеффера рода 0:

$$\vec{h}_{m,\mu} = \frac{(2|\mu| + 1)^{\overline{\ell(\mu) - 3}}}{|\text{Aut}(\mu)|} \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} \binom{2\mu_i}{\mu_i}, \quad m = |\mu| + \ell(\mu) - 2.$$



# Литература

- [1] Арнольд
- [2] A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, S. Natanzon *On KP-integrable Hurwitz functions*, arXiv:1405.1395
- [3] N. V. Alexeev, J. E. Andersen, R. C. Penner, P. G. Zograf *Enumeration of chord diagrams on many intervals and their non-orientable analogs*, arXiv:1307.0967
- [4] J. Ambjörn, L. Chekhov *The matrix model for dessins d'enfants*, arXiv:1404.4240
- [5] E. A. Bender, Z. Gao, L. B. Richmond, *The map asymptotics constant  $t_g$* , Electron. J. Combin. 15 (2008), no. 1, Research paper 51, 8 pp.
- [6] S. Bloch and A. Okounkov, *The character of the infinite wedge representation*, Adv. Math., 149-1 (2000), 1–60.
- [7] M. Bousquet-Mélou, G. Schaeffer, *Enumeration of planar constellations*, Adv. in Appl. Math., **24**, 337–368 (2000)
- [8] Т. Мива, М. Джимбо, Э. Датэ, Солитоны. Дифференциальные уравнения, симметрии и бесконечномерные алгебры, М., МЦНМО, 2005
- [9] Б. А. Дубровин, С. М. Натанзон, *Вещественные тэта-функциональные решения уравнения Кадомцева–Петвиашвили*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 52:2 (1988), 267–286; Math. USSR-Izv., 32:2 (1989), 269–288
- [10] A. Eskin, A. Okounkov *Asymptotics of numbers of branched coverings of a torus and volumes of moduli spaces of holomorphic differentials*, Inventiones mathematicae, July 2001, Volume 145, Issue 1, pp 59–103
- [11] I. Gessel, *Symmetric functions and P-recursiveness*, J. Combin. Theory Ser. A 53 (1990), no. 2, 257–285.
- [12] I. P. Goulden, M. Guay-Paquet, J. Novak, *Polynomiality Of Monotone Hurwitz Numbers In Higher Genera*, Advances in Mathematics, Volume 238, 1 May 2013, Pages 1–23

- [13] I. P. Goulden, M. Guay-Paquet, J. Novak, *Monotone Hurwitz numbers in genus zero*, arXiv:1204.2618
- [14] I. P. Goulden, D. M. Jackson, *The KP hierarchy, branched covers, and triangulations*, Adv. Math. 219, no. 3, 932–951 (2008).
- [15] Гриффитс Ф., Харрис Дж., *Принципы алгебраической геометрии*, М., Мир, 1988
- [16] M. Guay-Paquet, J. Harnad *2D Toda  $t$ -functions as combinatorial generating functions*, arXiv:1405.6303
- [17] M. Guay-Paquet, J. Harnad *Generating functions for weighted Hurwitz numbers*, arXiv:1408.6766
- [18] J. Harnad, *Multispecies quantum Hurwitz numbers*, arXiv:1410.8817
- [19] J. Harnad, A. Yu. Orlov *Hypergeometric  $\tau$ -functions, Hurwitz numbers and enumeration of paths*, arXiv:1407.7800
- [20] Jucys, A.-A. A. *Symmetric polynomials and the center of the symmetric group ring*. Rep. Mathematical Phys. 5 (1974), no. 1, 107–112.
- [21] V. Кас, *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press. 1990.
- [22] M. Kazarian, S. Lando, *An algebro-geometric proof of Witten’s conjecture*, J. Amer. Math. Soc., **20**, 1079–1089 (2007)
- [23] М.Казарян, С.Ландо, *Комбинаторные решения интегрируемых иерархий*, Успехи математических наук, т. 70. с. 3. с. 70–106 (2015)
- [24] M. Kazarian, P. Zograf, *Virasoro constraints and topological recursion for Grothendieck’s dessin counting*, arXiv:1406.5976
- [25] S. Kerov, G. Olshanski, *Polynomial functions on the set of Young diagrams*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 319 (1994), 121–126.
- [26] А. К. Звонкин, С. К. Ландо *Графы на поверхностях и их приложения*, М., МЦНМО, 2010.
- [27] Murphy, G. E. *A new construction of Young’s seminormal representation of the symmetric groups*. J. Algebra 69: 287–297 (1981).
- [28] S. M. Natanzon, A. Yu. Orlov, *Hurwitz numbers and BKP hierarchy*, arXiv:1407.8323
- [29] A. Okounkov, *Toda equations for Hurwitz numbers*, Math. Res. Lett. **7**, no. 4, 447–453 (2000).
- [30] А. Окуньков, Г. Ольшанский, *Сдвинутые функции Шура*, Алгебра и анализ, 1997, том 9, выпуск 2, страницы 73–146

- [31] A. Okounkov and R. Pandharipande, *Gromov-Witten Theory, Hurwitz Theory, and Completed Cycles*, Annals of Mathematics Second Series, Vol. 163, No. 2 (Mar., 2006), pp. 517–560
- [32] A. Okounkov, A. Vershik, *A new approach to representation theory of symmetric groups*, Selecta Math. (N.S.) vol. 2, no. 4, 58–605 (1996)
- [33] A. Yu. Orlov, D. M. Scherbin, *Multivariate hypergeometric functions as  $\tau$ -functions of Toda lattice and Kadomtsev–Petviashvili equation*, Advances in nonlinear mathematics and science. Phys. D 152/153, 51–65 (2001).
- [34] R. Pandharipande, *The Toda equations and the Gromov–Witten theory of the Riemann sphere*, Lett. Math. Phys. **53**, no. 1, 59–74 (2000).
- [35] B.E. Sagan, *The Symmetric Group*, Springer, 2001.
- [36] M. Sato, Y. Sato, *Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional Grassmann manifolds*, in: Nonlinear partial differential equations in applied science, North-Holland, Amsterdam, 259–271 (1983)
- [37] S. Shadrin, D. Zvonkine, *Changes of variables in ELSV-type formulas*, Michigan Math. J. **55**, no. 1, 209–228 (2007)
- [38] K. Ueno and K. Takasaki, *Toda lattice hierarchy*, Adv. Studies in Pure Math. 4, Group Representations and Systems of Differential Equations, 1–95, 1984
- [39] Vershik, A. M.; Okun’kov, A. Yu. *A new approach to representation theory of symmetric groups. II.* (Russian) Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 307 (2004), Teor. Predst. Din. Sist. Komb. i Algoritm. Metody. 10, 57–98, 281; translation in J. Math. Sci. (N. Y.) 131 (2005), no. 2, 5471–5494
- [40] E. Witten, *Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli spaces*, Surveys in Differential Geometry, vol. 1, 243–269 (1991)
- [41] P. Zograf *Enumeration of Grothendieck’s dessins and KP hierarchy*, arXiv:1312.2538, 8 pp.
- [42] D. Zvonkine *Enumeration of ramified coverings of the sphere and 2-dimensional gravity*, arXiv:math/0506248v1