Лекция 9-19. Аппаратные свойства преобразования Фурье

1 Свертка

Подобие свертки возникло при изучении δ-образных последовательностей. А именно, мы доказали, что если Δ_n – δ-образная последовательность, а f – финитная непрерывная функция, то

$$\int f(x)\Delta_n(x-y)dx \rightrightarrows f(y). \tag{1}$$

Замечане 1 *В этой теореме финитность можно заменить на ограниченность.*

Операция, переводящая пару функций f, Δ_n в левую часть соотношения (1), несимметрична. Ее симметричный аналог определяется так:

Определение 1 *Свертка двух функций на прямой (обозначается $f * g$) – это функция*

$$f * g : y \mapsto \int f(x)g(y-x)dx.$$

Следующее определение равносильно.

Определение 2 *Рассмотрим дифференциальную 1-форму на плоскости:*

$$\omega_x = f(x)g(y)dx$$

Положим:

$$f * g(z) = \int_{l_z} \omega_x. \tag{2}$$

Здесь l_z – прямая $x + y = z$, ориентация которой индуцируется из ориентации оси x проектированием $(x, y) \mapsto x$.

Предполагается, что все участвующие в определении интегралы сходятся.

Теорема 1 *Свертка симметрична:*

$$f * g = g * f$$

Доказательство По определению,

$$g * f = \int_{l_z} g(x)f(y)dx := \int_{l_z} \omega'_x$$

Симметрия $s : (x, y) \mapsto (y, x)$ переводит форму ω'_x в форму $\omega_y = f(x)g(y)dy$. Заметим, что на $l_z : \omega_x + \omega_y = 0$. Симметрия s переводит l_z в $-l_z$. Поэтому

$$\int_{l_z} \omega'_x = \int_{-l_z} s^*\omega'_x = \int_{-l_z} \omega_y = -\int_{-l_z} \omega_x = \int_{l_z} \omega_x.$$

□

2 Свертка, симметрия и преобразование Фурье

Формула обращения для преобразования Фурье похожа не формулу самого преобразования Фурье. Если бы эти две формулы совпадали, преобразование Фурье было бы инволюцией: его квадрат равнялся бы единице (тождественному преобразованию). Посмотрим, насколько квадрат преобразования Фурье отличается от единицы.

Определение 3 *Оператор симметрии* $S : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ *- это оператор* $Sf = g,\ g(x) = f(-x)$.

Формула обращения для преобразования Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int \tilde{f}(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int \tilde{f}(-\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}S\tilde{f}.$$

Таким образом

$$\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}S. \tag{3}$$

Отсюда следует:

$$\mathcal{F}^{-2} = \frac{1}{2\pi}S,\ \mathcal{F}^2 = 2\pi S. \tag{4}$$

Предложение 1 *Оператор симметрии* S *коммутирует со сверткой и с преобразованием Фурье.*

Доказательство 1. Имеем:

$$Sf * Sg(z) = \int_{l_z} f(-x)g(-y)dx = \int_{l_{-z}} f(x)g(y)dx = (f * g)(-z) = S \circ (f * g)(z) \tag{5}$$

2. $\mathcal{F}Sf(\alpha) = \int f(-x)e^{-i\alpha x}dx = \int f(x)e^{i\alpha x}dx = \tilde{f}(-\alpha) = S\tilde{f}(\alpha)$. □

3 Свертка и преобразование Фурье

Теорема 2 *Преобразование Фурье переводит свертку в произведение и произведение в свертку (последнее – с коэффициентом $\frac{1}{2\pi}$).*

Доказательство 1. Докажем, что

$$\mathcal{F}(f * g) = \tilde{f}\tilde{g} \tag{6}$$

По формуле (2),

$$\mathcal{F}(f*g)(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{l_z} f(x)g(y)dx \right) e^{-i\alpha z} dz = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\alpha(x+y)} f(x)g(y) \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\alpha x} f(x) e^{-i\alpha y} g(y) dx dy = \tilde{f}(\alpha)\tilde{g}$$

2. Докажем, что

$$\mathcal{F}(fg) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}f * \mathcal{F}g.$$

Для этого применим преобразование Фурье к обеим частям уже доказанного равенства $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g$.

$$\mathcal{F}^2(f * g) = \mathcal{F}(\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g).$$

Положим: $\mathcal{F}f = \varphi,\ \mathcal{F}g = \psi$. Нам нужно доказать, что

$$\mathcal{F}(\varphi\psi) = \mathcal{F}^2(f * g) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\varphi * \mathcal{F}\psi.$$

По формуле (3),

$$f = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\varphi,\ g = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}S\psi.$$

Симметрия коммутирует с преобразованием Фурье и со сверткой. Поэтому

$$f * g = \frac{1}{(2\pi)^2} (\mathcal{F}S\varphi * \mathcal{F}S\psi) = \frac{1}{(2\pi)^2} (S\mathcal{F}\varphi * S\mathcal{F}\psi) = \frac{1}{(2\pi)^2} S(\mathcal{F}\varphi * \mathcal{F}\psi).$$

Следовательно,

$$\mathcal{F}(\varphi\psi) = \mathcal{F}^2(f * g) = 2\pi S \circ \frac{1}{(2\pi)^2} S(\mathcal{F}\varphi * \mathcal{F}\psi) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\varphi * \mathcal{F}\psi.$$

$\square$

Следующий раздел не связан с предыдущим. Однако, вместе с материалом предыдущего раздела, он понадобится в следующей лекции.

4 Функция Гаусса – неподвижная точка преобразования Фурье

Теорема 3 *Функция Гаусса $f_0(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ – неподвижная точка нормированного преобразования Фурье.*

Доказательство Доказательство получается выходом в комплексную область, и дается прямым вычислением.

$$\hat{f}_0(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2} - i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2i\alpha x-\alpha^2)} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} dx = \frac{e^{-\frac{\alpha^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x+i\alpha)^2} dx := e^{-\frac{\alpha^2}{2}} C(\alpha).$$

Заметим, что $C(\alpha)$ не зависит от α и равно 1!

Действительно,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x+i\alpha)^2} dx = \int_{\mathbb{R}+i\alpha} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

С помощью интегральной теоремы Коши докажите, что

$$\int_{\mathbb{R}+i\alpha} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

и тем самым, $C(\alpha)$ действительно не зависит от α. Итак, для $C = C(\alpha)$

$$\hat{f}_0(z) = C f_0(z),$$

то есть функция f_0 – собственная функция для преобразования Фурье с положительным собственным значением. Но нормированное преобразование Фурье – изометрия. Следовательно, $C = 1$, $\hat{f}_0 = f_0$.

Попутно мы доказали, что

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

(формула Эйлера-Пуассона). □