Материалы к семинарам по матанализу (четвёртый семестр)

9-я и 10-я недели (11.03 — 22.03.2019)

Примерные задачи семинаров

Задача 5.1. Докажите эквивалентность двух определений свёртки:
1) $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(y-x)\,dx$;
2) определим 1-форму $\omega = f(x)g(y)\,dx$ и положим $(f*g)(z) = \int_{\ell_z} \omega$, где $\ell_z = \{x+y=z\}$ — прямая, ориентация которой индуцируется из (положительной) ориентации оси x отображением $(x,y)\mapsto x$.

Задача 5.2. а) Докажите, что для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ отображение

$$T : \mathbb{R} \to L_2(\mathbb{R}),\ T(a)(x) = f(x+a)$$

непрерывно. Указание: использовать преобразование Фурье.
б) Докажите, что свертка двух функций $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ корректно определена и является непрерывной функцией.

Задача 5.3. Докажите ассоциативность операции свертки: $(f*g)*h = f*(g*h)$.

Задача 5.4. Найдите свертки $f*g$ и их преобразования Фурье для следующих функций:
а) $f = g = \chi_{[-1,1]}$; б) $f = \chi_{[a,b]}$, $g = \chi_{[c,d]}$;
в) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$, $g = \dfrac{\sin(ax)}{x}$; г) $f(x) = e^{-x^2/2}$, $g(x) = e^{-(ax+b)^2/2}$.

Задача 5.5. Пусть f — ограниченная непрерывная (не обязательно финитная) функция на $\mathbb{R}$, Δ_n — произвольная δ-образная последовательность. Верно ли, что:
а) $f * \Delta_n(x) \to f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$;
б) $f * \Delta_n \rightrightarrows f$ на всей прямой;
в) $f * \Delta_n \rightrightarrows f$ на любом компакте?

Задача 5.6. Напишите в явном виде формулу решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.

Задача 5.7. Решите задачу Коши для уравнения теплопроводности со следующими начальными условиями:
а) $f(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$; б) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

Задача 5.8*. Найдите явную формулу решения задачу Коши для уравнения теплопроводности с 2π-периодическими непрерывными начальными условиями с помощью рядов Фурье, аналогично решению задачи Коши с помощью преобразования Фурье.

Задача 5.9. Докажите, что пространство быстро убывающих функций

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid x^n f^{(m)}(x) \to 0 \text{ при } x \to \infty\}$$

а) содержит ненулевой элемент, б) бесконечномерно.

Задача 5.10. а) Докажите, что пространство быстро убывающих функций образует алгебру над $\mathbb{R}$ относительно стандартных арифметических операций.
б) Замкнуто ли оно относительно дифференцирования?
в) Замкнуто ли оно относительно свёртки?

Задача 5.11. Докажите, что преобразование Фурье
а) финитной непрерывной функции голоморфно на всей комплексной плоскости;
б) функции $f(x)$ с $|f(x)| < C_1 e^{-C_2|x|}$ голоморфно в полосе $|\operatorname{Im}\lambda| < C_2$.

Задача 5.12. Докажите, что если $f(z)$ — голоморфная функция в кольце $r < |z| < R$, где $r < 1 < R$, то для любого λ, $1 < \lambda < \min\{r^{-1}, R\}$, существует константа $C_\lambda > 0$, такая что все коэффициенты Фурье g_k функции $g(\varphi) = f(e^{i\varphi})$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$, удовлетворяют неравенству $|g_k| < C_\lambda \lambda^{-|k|}$.

Задача 5.13. С какой скоростью убывают коэффициенты Фурье функций:
а) $f(x) = \frac{1}{2-\sin x}$, б) $\dfrac{1}{\frac{1}{2} + e^{ix}}$?
Точнее, для каких $\lambda > 0$ существует C, такое что $|f_k| < Ce^{-\lambda|k|}$?

Таблица преобразований Фурье

$f(x)$	$\chi_{[-1,1]}$	$e^{-x^2/2}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$g(ax)$	$g(x+b)$	$e^{cx}g(x)$
$\tilde{f}(y)$	$\frac{2\sin(y)}{y}$	$\sqrt{2\pi}e^{-y^2/2}$	$\pi e^{-\|y\|}$	$\frac{1}{a}\tilde{g}\left(\frac{y}{a}\right)$	$e^{iby}\tilde{g}(y)$	$\tilde{g}(y+ic)$