

Дополнительные главы алгебры. Коллоквиум (по материалам третьего модуля).

Коллоквиум будет в среду 27 марта с 14:00 до 17:00. Надо будет ответить на один теоретический вопрос из билета и на один дополнительный вопрос по программе.

Теоретические вопросы

- (1) Дайте определение модуля над коммутативным кольцом. Дайте определение свободного модуля. Докажите, что ранг свободного модуля над целостным кольцом определен корректно. Докажите, что подмодуль свободного модуля ранга n над кольцом главных идеалов – тоже свободен и имеет ранг $m < n$.
[2] гл.9 §2, §3; [3] §10.1;
- (2) Сформулируйте и докажите теорему Жордана-Гельдера. [7] §2.8. [5] гл.4 §4;
- (3) Сформулируйте и докажите теорему Крулля-Шмидта. [7] §2.8.
- (4) Сформулируйте и докажите теорему о классификации конечнопорожденных модулей над кольцами главных идеалов. [5] гл. 15 §2.
- (5) Дайте определение факториального кольца. Сформулируйте и докажите лемму Гаусса. Докажите, что кольцо многочленов над факториальным кольцом факториально.
[2] гл.9 §7; [3] §5.6-5.7
- (6) Дайте определение поля частных целостного кольца. Сформулируйте и докажите лемму Гаусса. Докажите, что многочлен над факториальным кольцом неразложим тогда и только тогда, когда неразложим над его полем частных. Сформулируйте и докажите признак Эйзенштейна.
[2] гл.9 §7; [3] §5.4-5.6
- (7) Дайте определение результата пары многочленов через корни и через определитель матрицы Сильвестра. Докажите эквивалентность этих определений. Дайте определение дискриминанта многочлена через корни и через результат с производной.
[6] Лекция 5. [1] гл.6 §2 [4] гл. III §8.3
- (8) Сформулируйте и докажите теорему Безу о кривых на плоскости.
[6] Лекция 5.
- (9) Дайте определения целого расширения колец и докажите их эквивалентность. Докажите, что факториальное кольцо целозамкнуто.
[5] гл.9 §1;
- (10) Дайте определение кольца целых числового поля. Докажите, что целые в числовом поле образуют решетку полного ранга. Докажите, что группа Галуа нормального расширения \mathbb{Q} транзитивно действует на множестве максимальных идеалов над любым простым $p \in \mathbb{Z}$.
[5] гл.9 §2; [6] Лекция 6.
- (11) Сформулируйте и докажите редукционный признак неприводимости многочлена с целыми коэффициентами. Докажите, что стабилизатор максимального идеала кольца целых в группе Галуа нормального расширения \mathbb{Q} сюръективно отображается на группу Галуа фактора по этому идеалу.
[5] гл. 5 §7 и гл.9 §2;
- (12) Дайте определение нетерова кольца. Докажите, что факторкольцо нетерова кольца нетерово. Сформулируйте и докажите теорему Гильберта о базисе. Докажите, что всякое конечнопорожденное кольцо над нетеровым кольцом нетерово.
[2] гл.9 §4; [3] §5.4-5.6
- (13) Сформулируйте и докажите теорему Гильберта об инвариантах (для конечной группы).
Лекции, [4] гл. III §8.1
- (14) Сформулируйте и докажите теорему Гильберта о нулях (над \mathbb{C}).
[5] гл. 10 §2 [2] гл.9

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А.И. Кострикин, *Введение в алгебру. Основы алгебры.*
- [2] Э.Б. Винберг, *Курс алгебры. Издание 3-е, дополненное*
- [3] А.Л. Городенцев, *Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Часть 1.*
- [4] А.Г. Кузнецов, *Курс алгебры.* http://www.mi.ras.ru/~akuznet/kuznetsov_-_algebra.pdf
- [5] С. Ленг, *Алгебра*
- [6] М. Финкельберг, *Записки лекций в НМУ, алгебра 1 курс 1997 год.* <https://mccme.ru/iwm/f97/algebra1.html>
- [7] *Introduction to representation theory* by Pavel Etingof, Oleg Golberg, Sebastian Hensel, Tiankai Liu, Alex Schwendner, Dmitry Vaintrob, and Elena Yudovina <http://math.mit.edu/~etingof/relect.pdf>