

СЕМИНАР 1.
Модель для треугольной матричной группы
(для математиков младшего возраста)

А.А.КИРИЛЛОВ

Здесь я приведу несколько фактов, либо хорошо известных специалистам, либо содержащихся в моих лекциях в ВШЭ.

1. СУММА РАЗМЕРНОСТЕЙ УНЕПРЕДОВ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

Теорема 1. Пусть G - конечная группа, у которой все унепреды при-
наадлежат вещественному типу. Тогда справедливо тождество

$$(1) \quad \sum_{\lambda \in \widehat{G}} \dim \pi_\lambda = |Inv(G)|,$$

где $Inv(G)$ - множество всех инволюций в G .

Доказательство. Рассмотрим линейный оператор T в пространстве $\mathbb{C}[G]$, действующий по формуле

$$(Tf)(g) = f(g^{-1}).$$

След этого оператора можно вычислить двумя способами. Если выбрать в $\mathbb{C}[G]$ базис из дельта-функций $\delta_g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = g \\ 0, & \text{если } x \neq g \end{cases}$, то след T равен числу элементов $g \in G$, для которых $g = g^{-1}$, то-есть числу инволюций.

С другой стороны, если сделать преобразование Фурье

$$\tilde{f}(\lambda) = \sum_{g \in G} f(g) \pi_\lambda(g)$$

и учесть, что для унепредов вещественного типа (то-есть, ортогональных) $\pi_\lambda(g^{-1}) = \pi_\lambda(g)^t$, то оператор T перейдет в оператор \tilde{T} , действую-
щий по формуле $(\tilde{T}\tilde{f})(\lambda) = \tilde{f}(\lambda)^t$. В пространстве $(d \times d)$ -матриц оператор
транспонирования имеет след d . Поэтому след \tilde{T} равен сумме размер-
ностей всех унепредов G . \square

Известно также, что для общих групп в левой части (1) должна стоять сумма размерностей, умноженных на индекс Шура $ind \pi_\lambda$.

компонент, определяемых уравнениями $a_1 = 0$ и $a_2 = 0$. Каждая компонента является аффинной плоскостью \mathbb{A}^2 и эти плоскости пересекаются по аффинной прямой \mathbb{A}^1 , заданной уравнениями $a_1 = a_2 = 0$.

Над конечным полем \mathbb{F}_q каждая компонента содержит q^2 точек, из которых q - общие. Полное число точек равно $2q^2 - q$.

Пример 2. Многообразие \mathcal{M}_4 состоит из матриц $X = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 & c \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, удовлетворяющих уравнениям

$$a_1a_2 = 0, \quad a_2a_3 = 0, \quad a_1b_2 + b_1a_3 = 0.$$

Оно также состоит из двух компонент, определяемых парами уравнений:

$$\text{I. } a_1 = 0, \quad a_3 = 0; \quad \text{II. } a_2 = 0, \quad a_1b_2 + b_1a_3 = 0.$$

Первая компонента является аффинным пространством \mathbb{A}^4 , а вторая - произведением прямой \mathbb{A}^1 и 3-мерной квадрики. Пересечение этих компонент является аффинным прямой \mathbb{A}^3 , заданным уравнениями $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Над конечным полем \mathbb{F}_q первая компонента содержит q^4 точек, а вторая - $q^4 + q^3 - q^2$ точек, из которых q^3 - общие.

Полное число точек равно $2q^4 - q^2$.

В общем случае \mathcal{M}_n является объединением подмногообразий \mathfrak{g}_λ , состоящих из матриц X Жорданова типа λ , где λ пробегает разбиения вида $1^k 2^m$, $k + 2m = n$.

Для разбиений такого вида один из участников семинара нашел явную формулу для P_λ , показывающую, что это - многочлен общего типа. Мои вычисления многочленов P_λ до $|\lambda| = 7$, подтверждают это:

$$\begin{aligned}
P_1 &= 1, \\
P_2 &= q - 1, \\
P_{1^2} &= 1, \\
P_3 &= q^3 - 2q^2 + q, \\
P_{2,1} &= 2q^2 - q - 1, \\
P_{1^3} &= 1, \\
P_4 &= q^6 - 3q^5 + 3q^4 - q^3, \\
P_{3,1} &= 3q^5 - 5q^4 + q^3 + q^2, \\
P_{2^2} &= 2q^4 - 3q^3 + q^2, \\
P_{21^2} &= 3q^3 - q^2 - q - 1, \\
P_{1^4} &= 1, \\
P_5 &= q^{10} - 4q^9 + 6q^8 - 4q^7 + q^6, \\
P_{4,1} &= 4q^9 - 11q^8 + 9q^7 - q^6 - q^5, \\
P_{3,2} &= 5q^8 - 11q^7 + 4q^6 + 4q^5 - q^4 - q^3, \\
P_{3,1^2} &= 6q^7 - 9q^6 + q^5 + q^4, \\
P_{2^2,1} &= 5q^6 - 4q^5 - 4q^4 + q^3 + q^2 + q, \\
P_{2,1^3} &= 4q^4 - q^3 - q^2 - q - 1 \\
P_{1^5} &= 1, \\
P_6 &= q^{15} - 5q^{14} + 10q^{13} - 10q^{12} + 5q^{11} - q^{10} \\
P_{5,1} &= 5q^{14} - 19q^{13} + 26q^{12} - 14q^{11} + q^{10} + q^9, \\
P_{4,2} &= 9q^{13} - 31q^{12} + 35q^{11} - 10q^{10} - 5q^9 + q^8 + q^7 \\
P_{4,1^2} &= 10q^{12} - 26q^{11} + 19q^{10} - q^9 - q^8 - q^7, \\
P_{3^2} &= 5q^{12} - 16q^{11} + 15q^{10} - 5q^8 + q^6, \\
P_{3,2,1} &= 16q^{11} - 24q^{10} - 10q^9 + 19q^8 + 4q^7 - 2q^6 - 2q^5 - q^4, \\
P_{3,1^3} &= 10q^9 - 14q^8 + q^7 + q^6 + q^5 + q^4 \\
P_{2^3} &= 5q^9 - 9q^8 + 5q^6 - q^3, \\
P_{2^2,1^2} &= 9q^8 - 5q^7 - 5q^6 - 4q^5 + q^4 + 2q^3 + q^2 + q, \\
P_{2,1^4} &= 5q^5 - q^4 - q^3 - q^2 - q - 1, \\
P_{1^6} &= 1, \\
P_7 &= q^{21} - 6q^{20} + 15q^{19} - 20q^{18} + 15q^{17} - 6q^{16} + q^{15}, \\
P_{6,1} &= 6q^{20} - 29q^{19} + 55q^{18} - 50q^{17} + 20q^{16} - q^{15} - q^{14} \\
P_{5,2} &= 14q^{19} - 64q^{18} + 111q^{17} - 85q^{16} + 20q^{15} + 6q^{14} - q^{13} - q^{12} \\
P_{5,1^2} &= 15q^{18} - 55q^{17} + 71q^{16} - 34q^{15} + q^{14} + q^{13} + q^{12}, \\
P_{4,3} &= 14q^{18} - 56q^{17} + 76q^{16} - 29q^{15} - 15q^{14} + 6q^{13} + 6q^{12} - q^{11} - q^{10} \\
P_{4,2,1} &= 35q^{17} - 97q^{16} + 58q^{15} + 44q^{14} - 40q^{13} - 5q^{12} + 2q^{11} + 2q^{10} + q^9, \\
P_{4,1^3} &= 20q^{15} - 50q^{14} + 34q^{13} - q^{12} - q^{11} - q^{10} - q^9, \\
P_{3^2,1} &= 21q^{16} - 56q^{15} + 29q^{14} + 29q^{13} - 20q^{12} - 6q^{11} + q^{10} + q^9 + q^8 \\
P_{3,2^2} &= 21q^{15} - 49q^{14} + 14q^{13} + 29q^{12} - 6q^{11} - 6q^{10} - 6q^9 + q^8 + q^7 + q^6, \\
P_{3,2,1^2} &= 35q^{14} - 43q^{13} - 28q^{12} + 11q^{11} + 25q^{10} + 4q^9 - 3q^8 - 3q^7 - 2q^6 - q^5, \\
P_{3,1^4} &= 15q^{11} - 20q^{10} + q^9 + q^8 + q^7 + q^6 + q^5, \\
P_{2^3,1} &= 14q^{12} - 14q^{11} - 14q^{10} - 6q^9 - 6q^8 - 6q^7 - q^6 - q^5 - q^4 - q^3, \\
P_{2^2,1^3} &= 14q^{10} - 6q^9 - 6q^8 - 5q^7 - 5q^6 + 2q^5 + 2q^4 + 2q^3 + q^2 + q, \\
P_{2,1^5} &= 6q^6 - q^5 - q^4 - q^3 - q^2 - q - 1, \\
P_{1^7} &= 1.
\end{aligned}$$

Однако, суммы многочленов P_λ по всем диаграммам λ , имеющим $\leq k$ столбцов, по-видимому, являются "малочленами". Таблица этих сумм для $k = 1$ приведена ниже. В этом случае для них имеется явная формула в терминах треугольника Каталана.

$$\begin{aligned}
A_0 &= 1, \\
A_1 &= 1, \\
A_2 &= q, \\
A_3 &= 2q^2 - q, \\
A_4 &= 2q^4 - q^2, \\
A_5 &= 5q^6 - 4q^5, \\
A_6 &= 5q^9 - 5q^7 + q^5, \\
A_7 &= 14q^{12} - 14q^{11} + q^7, \\
A_8 &= 14q^{16} - 20q^{14} + 7q^{12}, \\
A_9 &= 42q^{20} - 48q^{19} + 8q^{15} - q^{12}, \\
A_{10} &= 42q^{25} - 75q^{23} + 35q^{21} - q^{15}, \\
A_{11} &= 132q^{30} - 165q^{29} + 44q^{25} - 10q^{22} \\
A_{12} &= 132q^{36} - 275q^{34} + 154q^{32} - 11q^{26} + q^{22} \\
A_{13} &= 429q^{42} - 572q^{41} + 208q^{37} - 65q^{34} + q^{26} \\
A_{14} &= 429q^{49} - 1001q^{47} + 637q^{45} - 77q^{39} + 13q^{35} \\
A_{15} &= 1430q^{56} - 2002q^{55} + 910q^{51} - 350q^{48} + 14q^{40} - q^{35} \\
A_{16} &= 1430q^{64} - 3640q^{62} + 2548q^{60} - 440q^{54} + 104q^{50} - q^{40} \\
A_{17} &= 4862q^{72} - 7072q^{29} + 3808q^{67} - 1700q^{64} + 119q^{56} - 16q^{51}.
\end{aligned}$$

Мне удалось сосчитать аналогичные суммы $B_n := \sum_{k+2l+3m=n} P_{1^k 2^l 3^m}$ и $C_n := \sum_{k+2l+3m+4p=n} P_{1^k 2^l 3^m 4^p}$, но только для $n \leq 7$. Вот результат:

$$\begin{array}{ll}
B_0 = 1 & C_0 = 1 \\
B_1 = 1, & C_1 = 1 \\
B_2 = q, & C_2 = q \\
B_3 = q^3, & C_3 = q^3 \\
B_4 = 3q^5 - 3q^4 + q^3, & C_4 = q^6 \\
B_5 = 5q^8 - 5q^7 + q^5, & C_5 = 4q^9 - 6q^8 + 4q^7 - q^6 \\
B_6 = 5q^{12} - 9q^{10} + 5q^9, & C_6 = 9q^{13} - 16q^{12} + 9q^{11} - q^9 \\
B_7 = 21q^{16} - 35q^{15} + 15q^{14}, & C_7 = 14q^{18} - 21q^{17} + 14q^{16} - 6q^{14}.
\end{array}$$

3. ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЯ \mathcal{M}_n И КОМБИНАТОРИКА

Структура $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_2)$ связана по крайней мере с тремя комбинаторными объектами - размещением ладей на шахматных досках, разбиениями конечного множества на подмножества и с так называемыми "домиками".

3.1. Ладейные размещения. Под шахматной доской мы понимаем здесь любую область плоскости, разбитую на квадратные клетки одинакового размера и ориентации без общих внутренних точек. Достаточное число интересных примеров дают диаграммы Юнга. Для нас особый интерес

представляет треугольная доска D_n из $\binom{n}{2}$ клеток - диаграмма разбиения $\tau_n : (n-1, n-2, \dots, 2, 1)$.

Выбор m "отмеченных" клеток (в каждой из которых мы мысленно помещаем шахматную ладью) называется **ладейным m -размещением** (в англоязычной литературе - *rook m -placement*), если в каждой строке и в каждом столбце есть не более одной отмеченной клетки. Обычно размещение задается списком координат отмеченных точек: $P = \{(i_1, j_1), \dots, (i_m, j_m)\}$. Для размещения на D_n , эти координаты удовлетворяют условиям $1 \leq i_s < j_s \leq n$, причем все $2m$ чисел i_s, j_s различны.

Нетрудно установить, что матрица $X \in \mathfrak{g}_n(\mathbb{F}_2)$ удовлетворяет условию $X^2 = 0$, тогда и только тогда, когда клетки, содержащие единицу, образуют ладейное размещение на диаграмме D_n .

С другой стороны, если перестановка $s \in S_n$ удовлетворяет условию $s^2 = e$, то ее матрица симметрична (поскольку $M^t = M^{-1} = M$). Поэтому матричные элементы, равные 1, занимают $k = n - 2m$ диагональных клеток и m пар недиагональных клеток, расположенных симметрично относительно диагонали. Те из них, которые лежат выше диагонали, образуют ладейное m -размещение.

3.2. Разбиения множеств. Назовем m -разбиением конечного множества X представление его в виде объединения m непустых дизъюнктных подмножеств: $X = \coprod_{k=1}^m X_k$. Число таких разбиений в комбинаторике называется **числом Стирлинга второго рода** и обозначается $S(n, m)$ или $\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$.

Таблица значений $S(n, m)$ при $0 \leq n, m \leq 9$ имеет вид

$n \setminus m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

Связь чисел Стирлинга с ладейными размещениями основана на следующем наблюдении. Каждое ладейное размещение $P = \{(i_1, j_1), \dots, (i_m, j_m)\}$ на D_n определяет минимальное отношение эквивалентности R на $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$, при котором i_s эквивалентно j_s для всех s . Легко видеть, что для m -размещения P отношение R имеет $n - m$ классов эквивалентности: пустое размещение соответствует разбиению на отдельные точки,

а каждая новая ладья уменьшает число классов на единицу. Поэтому число m -размещений на D_n равно числу Стирлинга $S(n, n - m)$.

Интересно, что число m -размещений на D_n зависит от m не монотонно. Оно равно 1 для $m = 0$, растет до максимального значения и потом снова убывает до нуля при $m = n$. Максимальное значение достигается для одного или двух соседних значений $m \approx \frac{n}{\log n}$. Логарифм этого максимального значения равен $n \log n - n \log \log n + O(\frac{n \log \log n}{\log n})$.

3.3. Домики. Еще одно комбинаторное понятие: "дуговые картинки" (от английского link-patterns), которое я предпочитаю называть "домиками", было изобретено матфизиками для изучения петлевых конфигураций и использовано в работах А.Мельниковой (см. Ссылки ниже).

Пусть $P = \{(i_1, j_1), \dots, (i_m, j_m)\}$ - ладейное m -размещение на D_n . Число m назовем размером домика. Расположим точки $1, 2, \dots, n$ на прямой и соединим каждую пару (i_s, j_s) ломаной линией - "крышей домика". Некоторые точки останутся изолированными (число их равно $k = n - 2m$). Введем также наглядные понятия пересечения крыши и накрытия изолированных точек; например, на рисунке ниже, где $n = 10$, $P = \{(2, 7), (3, 4), (6, 10)\}$ мы имеем 3 крыши (с вершинами a, b, c над точками 5,4,8), изолированные точки (1,4,7,9), одно пересечение и 5 накрытий (точки 4 и 7 накрыты дважды, точка 8 один раз, а точка 1 не накрыта

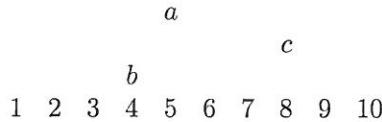


Рис.1

Следующую красивый факт открыла Анна Мельникова:¹

Теорема 2. Размерность класса B -сопряженных элементов в G_n , содержащего элемент $X = \sum_{s=1}^m E_{i_s, j_s}$, равна $m(n - m)cr(P)cov(P)$, где $cr(P)$ - число пересечений (crossing), а $cov(P)$ - число накрытий (cover).

Следствием этой теоремы является тот факт, что классы максимальной размерности связаны с такими размещениями, у которых нет ни пересечений, ни накрытий, а количество изолированных точек минимально: одна для n нечетного и ни одной для n четного.

В самом деле, поскольку $m = \frac{n-k}{2}$, то $m(n - m) = \frac{n^2 - k^2}{4}$. Так что при данном n произведение $m(n - m)$ максимально, когда k минимально.

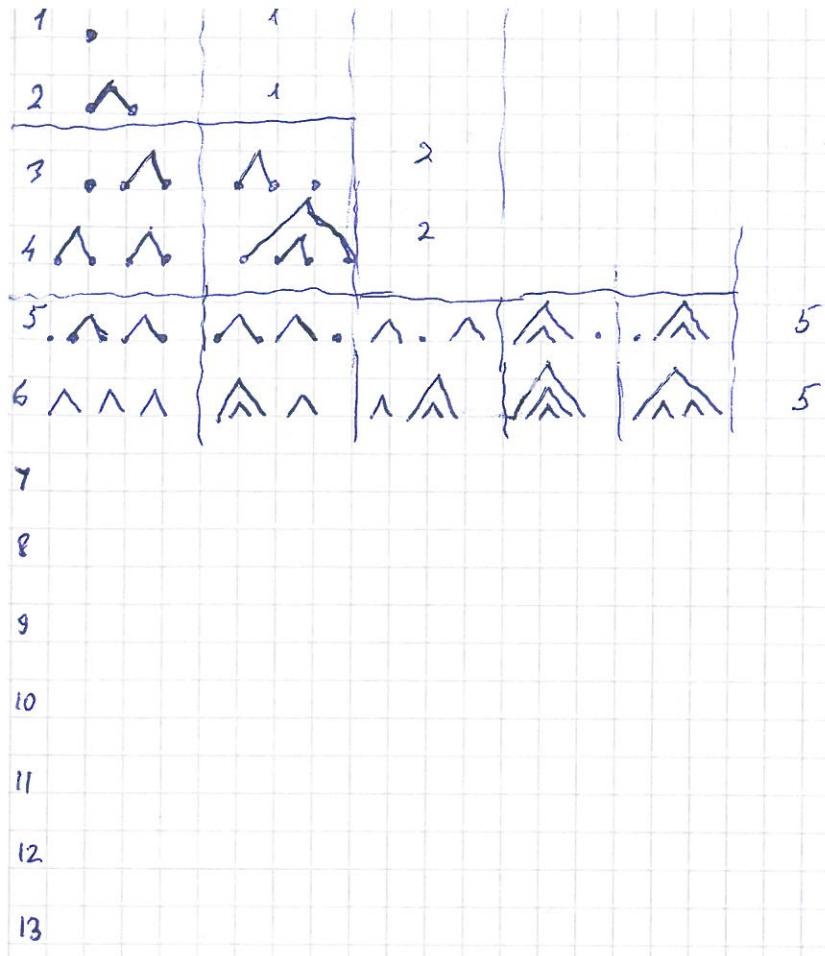
Структура домиков, соответствующих классам максимальной размерности, довольно проста и красива, а число их для $n = 2k$ и для $n = 2k - 1$ равно k -ому числу Каталана $c_k = \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} = \binom{2k}{k} - \binom{2k}{k+1}$.

¹ Я знал эту формулу для многих частных случаев, но не смог угадать правильную форму общего ответа.

References (some of them)

- [1] P. Di Francesco, P. Zinn-Justin, From Orbital Varieties to Alternating Sign Matrices, math-ph/0512047.
- [2] F.Y.C.Fung On the topology of components of some Springer fibers and their relation to Kazhdan-Lusztig theory, Advances in Math. 178 (2003), pp. 244-276.
- [3] J.J. Graham, G.I. Lehrer, Cellular algebras, Invent. Math. 123 (1996), pp. 1-34.
- [4] W. Hesselink, Singularities in the nilpotent scheme of a classical group, Trans. Am. Math. Soc. 222 (1976), pp. 1-32.
- [5] A. Joseph, On the variety of a highest weight module, J. of Algebra 88 (1984), 238-278.
- [6] A. Knutson, P. Zinn-Justin, A scheme related to the Brauer loop model, math.AG/0503224.
- [7] A. Melnikov, Irreducibility of the associated varieties of simple highest weight modules in $\mathrm{sl}(n)$, C.R.A.S. I, 316 (1993), 53-57.
- [8] A. Melnikov, Orbital varieties in sl_n and the Smith conjecture, J. of Algebra, 200 (1998), pp. 1-31.
- [9] A. Melnikov, B-orbits in solutions to the equation $X^2 = 2$ in triangular matrices, J. of Algebra, 223 (2000), pp. 101-108.
- [10] A. Melnikov, The combinatorics of orbital variety closures of nilpotent order 2 in sl_n , Electronic Journal of Combinatorics, vol. 12(1), 2005, R21.
- [11] A. Melnikov, Description of B-orbit closures of order 2 in upper-triangular matrices, Transformation Groups, Vol. 11 No. 2, 2006, pp. 217-247.

E-mail address: kirillov@math.upenn.edu



A_1	B_1	C_1	D
A_2	B_2	C_2	
A_3	B_3		

$X =$

$$A_1^2 = A_2^2 = A_3^2 = A_{\bar{3}}^2 = 0$$

$$X^2 = 0$$

i.e.

$$A_1 B_1 + B_1 A_2 = A_2 B_2 + B_2 A_3 = A_3 B_3 + B_3 A_1 = 0$$

$$A_1 C_1 + B_1 B_2 + C_1 A_1 = A_2 C_2 + B_2 B_3 + C_2 A_3 = 0$$

$$A_1 D + B_1 C_2 + C_1 B_2 + D A_3 = 0$$