ЛИСТОК 2

Задача 1. Какую наиболее вероятную сумму очков можно получить, бросая одновременно а) два игральных кубика? б) три игральных кубика? в) n игральных кубиков?

Указание. Считается, что кубики "честные" и бросаются независимо друг от друга. Это означает, что при броске n кубиков вероятность того, что на первом кубике выпадет грань a_1, на втором — a_2, ..., на n-ом — a_n, одна и та же для всех наборов $a_1, \dots, a_n$.

Задача 2. Точки $A_1, \dots, A_n$ — вершины правильного n-угольника. Случайным образом проводятся два отрезка (ненулевой длины) с концами в этих точках. Какова вероятность того, что они а) имеют общий конец? б) пересекаются? (в конце или во внутренней точке, в т.ч. совпадают) в) Найдите пределы этих вероятностей при $n \to \infty$. Можно ли сделать это, не решая самих задач 2а и 2б?

Указание. "Случайным образом" здесь означает, что для любой четверки точек A_i, A_j, A_k, A_l, в которой $A_i \neq A_j$ и $A_k \neq A_l$ (но другие равенства возможны!), вероятность того, что проведены отрезки A_iA_j и A_kA_l, одна и та же.

Задача 3. Игрок в бридж A не получил при раздаче ни одного туза. а) Шпионы донесли ему, что у игрока B есть туз. Какова вероятность того, что у игрока B по меньшей мере два туза? б) Тот же вопрос в случае, если шпионы донесли, что у игрока B есть туз пик. в) В каком из пунктов 3а, 3б вероятность больше? Можно ли доказать это неравенство, не решая самих задач 3а и 3б?

Указание. При игре в бридж каждый из четырех игроков A, B, C, D получает при раздаче 13 карт. Честная раздача карт означает, что для любого разбиения множества всех 52 карт (от двойки до туза) на 4 подмножества S_A, S_B, S_C, S_D по 13 карт вероятность того, что подмножество S_A достанется игроку A, подмножество S_B — игроку B, и т.д., одна и та же для всех наборов подмножеств S_A, S_B, S_C, S_D.

Задача 4. Кузнечик перемещается по вещественной прямой, каждую секунду совершая прыжок на расстояние 1 — с равной вероятностью вправо и влево. В начальный момент кузнечик находится в точке $n \in \mathbb{Z}$; в точке 0 расположена добыча. Обозначим $p_{n,k}$ вероятность удачной охоты кузнечика за k прыжков, т.е. долю тех путей длины k, которые хоть раз попадают в 0. (Путь длины k это последовательность $(k+1)$ чисел $a_0, a_1, \dots, a_k$, в которой $a_0 = n$, а любые стоящие рядом числа отличаются на 1.) а) Вычислите $p_{n,k}$ при $k = 0, 1, 2$ (и произвольном n). б) Найдите рекуррентное соотношение, выражающее величину $p_{n,k}$ через величины $p_{m,k-1}$ со всевозможными m.

Символом p_n обозначим $\sup_k p_{n,k}$, т.е. наименьшее число такое, что $p_n \geq p_{n,k}$ при всех $k \geq 0$. в) Найдите линейное рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами, которому удовлетворяет последовательность p_n. Найдите явную формулу для p_n. г) Объясните, почему p_n можно считать вероятностью удачной охоты при неограниченном ее продолжении. д) Найдите среднее число прыжков u_n, которое кузнечик сделает, прежде чем поймает добычу.

Указание (к пункту 4г)**.** Постройте соответствие между путями бесконечной длины и точками отрезка $[0, 1]$, а затем воспользуйтесь "геометрическим" определением вероятности.

Указание (к пункту 4д)**.** Пусть $q_{n,k}$ — вероятность того, что кузнечик поймает добычу (впервые попадет в точку 0) *ровно* на k-ом шаге. Тогда среднее число прыжков (оно же матожидание числа прыжков) u_n равно $1 \cdot q_{n,1} + 2 \cdot q_{n,2} + 3 \cdot q_{n,3} + \dots$.

Задача 5. а) Сколько раз в среднем нужно подбросить монету до тех пор, пока в двух последовательных бросках не выпадут орел и решка (именно в этом порядке)? б) А две решки? в) Пусть теперь монета "кривая": вероятность выпадения орла p, а решки $1 - p$. Сколько раз в среднем нужно подбросить монету до тех пор, пока одна сторона монеты (неважно, какая) не выпадет два раза подряд?

Задача 6. а) Игрок A выигрывает, если в двух последовательных бросках монеты выпали орел и решка, а игрок B — если выпали подряд две решки. Монету ("честную") подбрасывают несколько раз — до тех пор, пока не выиграет либо A, либо B. У кого вероятность выигрыша больше? б) Пусть a и b — две конечные последовательности из орлов и решек. Обозначим p_{ab} вероятность того, что в при случайном бросании монеты последовательность исходов a появится раньше, чем последовательность b (монету, как и предыдущей задаче, бросают несколько раз — пока не появится либо a, либо b). Составьте таблицу 4×4 из чисел p_{ab}, где a и b независимо пробегают множество $\{oo, op, po, pp\}$. в) Существуют ли три последовательности a, b, c из орлов и решек (не обязательно одинаковой длины), для которых $p_{ab} > 1/2$, $p_{bc} > 1/2$, $p_{ca} > 1/2$?