ЛИСТОК 3

Задача 1. Докажите, что в каждой компоненте связности графа количество вершин нечетной степени четно.

Задача 2. Пусть γ — путь (не обязательно простой) в графе, соединяющий вершины A и B. Докажите, что в том же графе существует простой путь, соединяющий A и B и проходящий только по тем ребрам, по которым путь γ прошел нечетное число раз.

Задача 3. Связный граф называется эйлеровым, если в нем существует замкнутый путь, проходящий по каждому ребру ровно один раз. а) Докажите, что степень каждой вершины в эйлеровом графе четна. б) Докажите, что эйлеров граф является объединением простых циклов, не имеющих общих ребер (но, вероятно, имеющих общие вершины). в) Докажите, что если граф G связен и является объединением простых циклов, не имеющих общих ребер (но, возможно, имеющих общие вершины), то G — эйлеров граф. г) Докажите, что всякий связный граф, в котором степени всех вершин четны, является эйлеровым.

Указание (к пункту 3в)**.** Для графа G рассмотрите вспомогательный граф, вершины которого — простые циклы, объединением которых является G, а две вершины соединены ребром, если соответствующие циклы пересекаются (имеют общую вершину). Докажите, что этот граф связный, и проведите доказательство индукцией по числу простых циклов.

Задача 4. а) Докажите, что в каждой компании из 6 человек имеются либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых. б) Докажите, что существует число N такое, что в каждой компании из N человек имеются либо четверо попарно знакомых, либо четверо попарно незнакомых? Укажите как можно меньшее значение N.

Задача 5. Докажите, что в каждом связном графе имеется подграф, включающий все вершины и являющийся деревом.

Задача 6. Пусть G — граф, в котором v_0 вершин, v_1 ребер и h_0 компонент связности. а) Докажите, что имеет место неравенство $v_1 \geq v_0 - h_0$, причем равенство достигается в том и только том случае, когда каждая компонента связности графа — дерево. б) Пусть F_G — векторное пространство над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, элементами которого являются функции $f : V_1 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (где V_1 — множество ребер графа G), удовлетворяющих следующему условию: если ребра $e_1, \dots, e_k \in V_1$ образуют цикл, то $f(e_1) + \dots + f(e_k) = 0$. Докажите, что $\dim F_G = v_0 - h_0$.

Задача 7. Пусть T — дерево, вершины которого занумерованы от 1 до n. Определим числовую последовательность $b(T) = (b_1, \dots, b_{n-2})$ по индукции следующим образом. Пусть a — самый большой номер "висячей" вершины дерева; тогда b_1 — номер ее "родителя" (единственной вершины, которая соединена с a ребром). Удалим теперь из дерева T вершину a вместе с ребром ab_1; полученное дерево обозначим T'. Тогда по определению $b(T') = (b_2, \dots, b_{n-1})$ (индукция!). Последовательность $b(T)$ называется кодом Прюфера дерева T. а) Докажите, что код Прюфера полностью определяет дерево: если $b(T_1) = b(T_2)$, то $T_1 = T_2$ (как деревья с нумерованными вершинами). б) Докажите, что любая последовательность $b_1, \dots, b_{n-2}$, где все $b_i \in \{1, \dots, n\}$, является кодом Прюфера некоторого дерева с n вершинами. Найдите общее количество деревьев с n вершинами, занумерованными $1, \dots, n$.

Задача 8. Пусть T — дерево, вершины которого занумерованы от 1 до n, а ребра — от 1 до $(n-1)$. Обозначим a_i, b_i концы i-го ребра ($i = 1, \dots, n-1$). Докажите, что произведение транспозиций $(a_1 b_1)(a_2 b_2) \dots (a_{n-1} b_{n-1})$ (в группе перестановок S_n) — циклическая перестановка.

Указание. Докажите индукцией по $k = 1, \dots, n-1$, что произведение транспозиций $(a_1 b_1)(a_2 b_2) \dots (a_k b_k)$ — перестановка (элемент S_n), раскладывающаяся в произведение $n - k$ непересекающихся циклов.

Задача 9. а) Известно, что всякое конечномерное векторное пространство имеет базис. Выведите отсюда, что всякое векторное пространство (не только конечномерное!) имеет базис. б) Докажите уточненную версию утверждения пункта 9а: всякое линейно независимое множество векторов (не обязательно конечное!) в векторном пространстве можно дополнить до базиса. в) Докажите, что любой идеал в кольце с единицей лежит в некотором максимальном идеале. г) В городе N бесконечно много жителей, некоторые из которых работают киллерами. Каждый киллер охотится только за одной жертвой (жертва сама может быть киллером, а может и не быть). Докажите, что существует бесконечное множество жителей города N, в котором никто ни за кем не охотится.

Указание. Все пункты задачи 9 можно решить с применением *леммы Цорна*: если в частично упорядоченном множестве X каждое линейно упорядоченное подмножество $Y \subset X$ ограничено сверху, то в множестве X существует хотя бы один максимальный элемент.

Напоминаем необходимые определения. Множество векторов $\mathcal{N}$ в векторном пространстве V называется линейно независимым, если для любого конечного набора векторов $v_1, \ldots, v_N \in \mathcal{N}$ равенство $x_1 v_1 + \cdots + x_N v_N = 0$ возможно только при $x_1 = \cdots = x_N = 0$. Множество векторов $\mathcal{F} \subset V$ называется полным, если для всякого вектора $v \in V$ найдутся векторы $v_1, \ldots, v_N \in \mathcal{F}$ и числа $x_1, \ldots, x_N$ такие, что $v = x_1 v_1 + \cdots + x_N v_N$. Векторное пространство называется конечномерным, если в нем имеется конечное полное множество векторов. Множество векторов в пространстве называется базисом, если оно одновременно полное и линейно независимое.

Подмножество R кольца K называется (левым) идеалом, если оно замкнуто относительно сложения (для любых $u_1, u_2 \in R$ имеем $u_1 + u_2 \in R$) и для всяких $u \in R$ и $a \in K$ имеет место включение $au \in R$. Идеал называется максимальным, если он не совпадает со всем кольцом K, но не содержится ни в каком другом идеале, кроме самого кольца K.

Множество X с отношением $\leq$ называется частично упорядоченным, если $x \leq x$ для всякого $x \in X$, из $x \leq y \leq z$ вытекает $x \leq z$ и из $x \leq y \leq x$ вытекает $x = y$. Частично упорядоченное множество Y называется линейно упорядоченным, если любые два его элемента сравнимы: $x \leq y$ или $y \leq x$. Говорят, что множество $A \subset X$ ограничено сверху, если существсвует элемент x такой, что $a \leq x$ для всех $a \in A$. Элемент $x \in X$ называется максимальным, если $x \leq y$ только при $x = y$.