ЛИСТОК 1

Задача 1. а) Докажите для произвольного n равенство $(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\dots(1+q^{2^n}) = \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}$. б) Докажите равенство $(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\dots = \frac{1}{1-q}$ (в левой части — бесконечное произведение); дайте точное определение выражений в левой и правой части. в) Докажите, что произвольное натуральное число можно единственным образом записать в двоичной системе счисления. г) Объясните все возможные связи (что из чего следует) между пунктами 1а, 1б и 1в.

Задача 2. Для произвольного $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ обозначим $\mu(n) = 0$, если n делится на квадрат простого числа, и $\mu(n) = (-1)^k$, если $n = p_1 \dots p_k$ — произведение k попарно различных простых чисел; также $\mu(1) = 1$ по определению. а) Пусть $\sigma_0(m)$ — количество целых положительных делителей числа m (включая единицу и само m). Докажите равенство $\sum_{d|n} \sigma_0(d)\mu(n/d) = 1$ при всех $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. б) Пусть $\sigma_1(m)$ — сумма всех целых положительных делителей числа m. Чему равно $\sum_{d|n} \sigma_1(d)\mu(n/d)$?

Задача 3. Пусть $\mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов. а) Сколько точек содержит n-мерное проективное пространство над полем $\mathbb{F}_q$? б) Сколько наборов из k линейно независимых векторов содержит n-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{F}_q$? в) Сколько k-мерных подпространств содержит это же пространство? (Это число обозначается $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$.) г) Докажите, что $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ — многочлен от q (при фиксированных n и k). Найдите его степень и значение в точке $q = 1$. д) Докажите равенство $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q$. Постарайтесь при этом не ссылаться на явную формулу из пункта 3в, а установить взаимно однозначное соответствие между множествами k-мерных и $(n-k)$-мерных подпространств в n-мерном пространстве над $\mathbb{F}_q$. е) Докажите равенства $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q$ и $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q$.

Задача 4. Определим $\exp(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ и $\ln(1+t) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1} (-1)^{n-1} x^n/n$. а) Дайте определение производной степенного ряда и докажите, что $\exp'(x) = \exp(x)$ и $\ln'(1+t) = 1/(1+t)$. б) Докажите, что $\exp(\ln(1+t)) = 1+t$ (и дайте определение композиции в левой части равенства). в) Докажите, что $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Указание (к пункту 4б)**.** Вычислите производную левой части равенства. Докажите, что полученному уравнению удовлетворяет только $c(1+t)$, где c — произвольная константа.

Задача 5. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$; определим $(1+t)^\alpha \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} t^n = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} t^2 + \dots$. а) Докажите равенство $((1+t)^\alpha)' = \alpha(1+t)^{\alpha-1}$. б) Докажите равенство $\exp(\alpha \ln(1+t)) = (1+t)^\alpha$. в) Докажите равенство $(1+t)^\alpha (1+t)^\beta = (1+t)^{\alpha+\beta}$. г) Докажите равенство $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} t^n = (1-4t)^{-1/2}$. д) Докажите равенство $\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = 2^{2n}$. Как связано это равенство с результатамм пунктов 5г и 5в?

Указание (к пункту 5б)**.** Вычислите производную правой и левой части.

Задача 6. Назовем число n хорошим, если $\binom{n}{k}$ — четное число для всех $1 \le k \le n-1$. Например, число $n = 4$ — хорошее ($\binom{4}{1} = \binom{4}{3} = 4$, $\binom{4}{2} = 6$), а число $n = 6$ — нет ($\binom{6}{2} = 15$). а) Докажите, что если n — хорошее число, то $\binom{n-1}{k}$ — нечетное число для всех $0 \le k \le n-1$. б) Докажите индукцией по m, что если n — хорошее число и $0 \le k \le m \le n-1$, то $\binom{m}{k}$ и $\binom{n+m}{k}$ имеют одинаковую четность. в) Докажите, что если n — хорошее число, то $2n$ — тоже хорошее число. Выведите отсюда, что все числа вида 2^m, $m = 1, 2, \dots,$ — хорошие. г) Докажите, что других хороших чисел (кроме степеней 2) не существует. д) Нарисуйте (в масштабе) первые 2^{100} строк треугольника Паскаля mod2: четные числа обозначайте белыми точками, а нечетные — черными.

Задача 7. а) Докажите, что количество $p_k(n)$ решений уравнения $x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k = n$ в целых неотрицательных числах равно количеству решений уравнения $y_1 + \dots + y_k = n$, удовлетворяющих неравенствам $0 \le y_1 \le y_2 \le \dots \le y_k$. б) Докажите, что $p_k(n)$ равно количеству решений уравнения $y_1 + \dots + y_n = n$ в целых числах, удовлетворяющих неравенствам $0 \le y_1 \le y_2 \le \dots \le y_n \le k$. в) Докажите равенство $\sum_{n=0}^{\infty} p_k(n) t^n = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)\dots(1-t^k)}$. г) Пусть $p(n)$ — количество целочисленных решений уравнения $y_1 + \dots + y_n = n$, удовлетворяющих неравенствам $0 \le y_1 \le y_2 \le \dots \le y_n$. Докажите равенство $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) t^n = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)\dots}$ (в знаменателе бесконечное произведение).

Указание. Целочисленные решения уравнения $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$, удовлетворяющие неравенствам $x_1 \le x_2 \le \dots \le x_k$, называются *разбиениями* (числа n на k частей). Их полезно изображать в виде *диаграмм*

Юнга: ступенчатая фигура, выровненная по левому краю; нижняя строка содержит x_1 клеток, следующая — x_2 клеток, и т.д.; всего n клеток и k строк.

Задача 8. Пусть $r(n)$ — количество наборов целых чисел $(x_1, \dots, x_k)$ (со всевозможными k), в которых $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k$ и $x_1 + \dots + x_k = n$. а) Докажите равенство $1 + \sum_{n=1}^{\infty} r(n)t^n = (1+t)(1+t^2)(1+t^3)\dots$. б) Докажите равенство $(1+t)(1+t^2)(1+t^3)\dots = \frac{1}{(1-t)(1-t^3)(1-t^5)\dots}$ (в знаменателе показатели — всевозможные нечетные числа). в) Докажите, используя результат пунктов 8а и 8б, что $r(n)$ равно количеству решений уравнения $y_1 + \dots + y_n = n$ в целых положительных нечетных числах, удовлетворяющих неравенствам $1 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$. г) Докажите тот же результат, не используя пунктов 8а и 8б, а построив явное взаимно однозначное соответствие между множеством решений $(y_1, \dots, y_n)$ уравнения из пункта 8в и множеством наборов $(x_1, \dots, x_k)$ из определения $r(n)$.