2. Линейные рекурренты

Задача 2.1. Найдите количество замощений «доминошками» (т.е. прямоугольниками 1×2) прямоугольника

а) $2 \times n$; б) $3 \times 2n$.

Здесь замощения, отличающиеся поворотом или симметрией, считаются различными.

Задача 2.2. Какая из указанных последовательностей удовлетворяет рекуррентному уравнению $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$:

а) $a_n = 5n + 3$; б) $a_n = (2n + 1) \cdot 2^n$; в) $a_n = \cos(2n)$?

▷ В следующих задачах «найдите» означает «найдите в виде формул, содержащих многочлены от n, a^n и $\cos(\omega n + \varphi)$».

Задача 2.3. Найдите все такие последовательности $\{a_n\}$, что $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ и для любого $n \geq 1$ выполнено равенство

а) $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$;

б) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$;

в) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$;

г) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$;

д) $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$;

е*) $a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n$.

Задача 2.4. Найдите все последовательности, для которых $a_1 = 5$ и $a_{n+1} - 2a_n$ равно

а) 0; б) 1; в) n; г) 3^n; д*) 2^n; е*) $n \cdot 3^n$.

Задача 2.5. То же с заменой $a_{n+1} - 2a_n$ на $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n$.

Задача 2.6. а) **Теорема.** Если λ — корень кратности l уравнения $x^k = p_{k-1}x^{k-1} + \ldots + p_0$, то для любого многочлена $f \in \mathbb{R}[x]$ степени меньше l функция $f(n)\lambda^n$ является решением (линейного однородного рекуррентного) уравнения $a_{n+k} = p_{k-1}a_{n+k-1} + \ldots + p_0a_n$.

б) Для любых чисел $l_1, \ldots, l_k \in \mathbb{Z}$ и различных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C} - \{0\}$, последовательности $n^i\lambda_j^n$, $j = 1, \ldots, k$, $i = 0, \ldots, l_j$, линейно независимы.

в*) **Теорема.** Пусть $p_{k-1}, \ldots, p_0$ — числа, $a_{n+k} = p_{k-1}a_{n+k-1} + \ldots + p_0a_n$ для любого n, различные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — все комплексные корни многочлена $x^k - p_{k-1}x^{k-1} - \ldots - p_1x - p_0$ с кратностями $l_1, \ldots, l_k$. Тогда существуют такие многочлены $f_1, \ldots, f_k$, что $\deg f_j < l_j$ и $a_n = f_1(n)\lambda_1^n + \ldots + f_k(n)\lambda_k^n$ для любого n.

г*) (Загадка.) Сформулируйте и докажите теорему о явном виде решений линейного НЕоднородного рекуррентного уравнения k-го порядка.