3. Рациональные производящие функции

Задача 3.1. Для следующих рекуррентных последовательностей $\{a_n\}_{n\geq 0}$ найдите производящие функции $A(q) = \sum_{n\geq 0} a_n q^n$ в виде рациональной функции от q:
а) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_0 = a_1 = 1$;
б) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$;
в) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$;
г) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$, $a_0 = 2$, $a_1 = 8$;
д) $a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 6$.

Задача 3.2. а) Каждую из полученных дробей представьте в виде линейной комбинации простейших.
б) Для каждой из последовательностей из предыдущей задачи найдите явное выражение для a_n (в виде формул, содержащих многочлены от n, a^n и $\cos(\omega n + \varphi)$).

Задача 3.3. Разложите в ряд рациональную функцию:
а) $\frac{2q-3}{3q-5}$; б) $\frac{q-3}{q^2-6q+8}$; в) $\frac{1}{(1-q)^2}$.

Задача 3.4. Пусть последовательность задана условием $a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n$ (начальные условия a_0, a_1 также заданы). Доопределим эту последовательность тем же соотношением для отрицательных n и положим $b_n = a_{-n}$.
а) Найдите производящую функцию $A(q) = \sum_{n\geq 0} a_n q^n$.
б) Покажите, что если $\beta \neq 0$, то последовательность b_n определена однозначно.
в) Найдите производящую функцию $B(q) = \sum_{n\geq -1} b_n q^{n+1} = a_1 + a_0 q + a_{-1} q^2 + \ldots$.
г) Найдите (-10)-е число Фибоначчи F_{-10}.

Задача 3.5. Найдите производящую функцию для числа последовательностей длины n из нулей и единиц, не содержащих трех единиц подряд.