

1. Биномиальные коэффициенты

Задача 1.1. Сколькими способами можно разложить k одинаковых кусочков сахара по n различным чашкам, если в чашку можно класть:

- а) не более одного;
- б) любое количество;
- в) не менее одного кусочка сахара?

Задача 1.2. а) Найдите число путей на плоскости из точки $(0, 0)$ в точку (m, n) , составленных из векторов вида $(0, 1)$ и $(1, 0)$.

б) Придумайте и решите k -мерный аналог этой задачи.

Задача 1.3. Вычислите суммы:

- а) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$;
- б) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$;
- в) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{2\lfloor n/2 \rfloor}$;
- г*) $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots + \binom{n}{3\lfloor n/3 \rfloor}$;
- д) $\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+2}{2} + \dots + \binom{k+n}{n}$;
- е*) $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{2} + \binom{n+2}{4} + \dots + \binom{2n}{2n}$;
- ж) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + n\binom{n}{n}$;
- з) $\binom{n}{1} + 4\binom{n}{2} + 9\binom{n}{3} + \dots + n^2\binom{n}{n}$;
- и) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$.

(кто придумает больше разных доказательств?)

Задача 1.4. При каких k величина $\binom{n}{k}$ максимальна (при фиксированном n)?

Задача 1.5. Пусть p — простое число, $n = \sum_{i \geq 0} a_i p^i$, $m = \sum_{i \geq 0} b_i p^i$ — p -ичные разложения чисел n и m . Покажите, что

$$\binom{n}{m} \equiv \binom{a_0}{b_0} \binom{a_1}{b_1} \dots \pmod{p}.$$