

3½. Числа Каталана

▷ Напомним, что неформально n -м числом Каталана $C(n)$ называется число триангуляций выпуклого $(n + 2)$ -угольника. Так, $C(0) = C(1) = 1$, $C(2) = 2$, $C(3) = 5 \dots$

Задача 3½.1. Докажите рекуррентное соотношение для чисел Каталана:

$$C(n) = \sum_{k=0}^{n-1} C(k)C(n - k - 1).$$

Задача 3½.2. Докажите, что следующие последовательности являются последовательностями Каталана (желательно и построить биекцию, и объяснить, почему выполнено рекуррентное соотношение):

- Пути Дика:* пути из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$, составленные из векторов $(1, 1)$ и $(1, -1)$ и лежащие не ниже оси абсцисс;
- Число путей, не заходящих выше главной диагонали, которыми шахматную ладью можно провести из левого нижнего в правый верхний угол доски $(n + 1) \times (n + 1)$;
- Правильные скобочные структуры:* последовательности из n открывающих и n закрывающих скобок, для которых любой начальный участок последовательности содержит не меньше открывающих скобок, чем закрывающих;
- Число способов провести n непересекающихся (в т.ч. в вершинах) диагоналей в выпуклом $(2n)$ -угольнике;
- (для знакомых с теорией графов)* Число корневых бинарных деревьев с $n + 1$ листьями;
- Число способов расставить числа $1, 2, \dots, 2n$ в прямоугольной таблице $2 \times n$ так, чтобы они возрастали бы и по каждой строке, и по каждому столбцу.

Задача 3½.3. В этой задаче речь идет о путях, составленных из векторов $(1, 1)$ и $(1, -1)$.

- Докажите, что путей из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, -2)$ столько же, сколько путей из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$, пересекающих прямую $y = -1$.
- Докажите, что $C(n) = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Задача 3½.4. Рассмотрим граф, вершинами которого являются триангуляции $(n + 2)$ -угольника, а ребро между двумя вершинами отвечает паре триангуляций, отличающихся одной диагональю («флип»). Нарисуйте этот граф для $n = 2, 3, 4$.

Задача 3½.5. Что можно сказать о последовательности: *un, dos, tres, quatre, cinc, sis, set, vuit, nou, deu, onze, dotze...*?

Задача 3½.6*. Вычислите определители Каталана–Ганкеля:

$$а) \begin{vmatrix} C(0) & C(1) & \dots & C(n-1) \\ C(1) & C(2) & \dots & C(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(n-1) & C(n) & \dots & C(2n-2) \end{vmatrix}; \quad б) \begin{vmatrix} C(1) & C(2) & \dots & C(n) \\ C(2) & C(3) & \dots & C(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(n) & C(n+1) & \dots & C(2n-1) \end{vmatrix}.$$