4. Преобразование Мёбиуса

▷ Под значком $\sum\limits_{d|n}$ подразумевается сумма по всем натуральным делителям числа n.

▷ Определим *функцию Мёбиуса* $\mu(n)$ следующим образом:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1; \\ (-1)^k, & \text{если } n \text{ является произведением } k \text{ различных простых делителей;} \\ 0, & \text{если } n \text{ делится на } p^2 \text{ для некоторого простого числа } p. \end{cases}$$

Задача 4.1. а) Докажите, что $\sum\limits_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, n = 1; \\ 0, n \neq 1. \end{cases}$

б) Найдите сумму значений функции Мёбиуса по тем и только тем делителям числа n, в каноническое разложение которых входит чётное количество простых множителей.

в) (*Формула обращения Мёбиуса.*) Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — произвольная функция, $g(n) = \sum\limits_{d|n} f(d)$. Тогда выполнена формула

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d).$$

▷ *Функция Эйлера* $\varphi(n)$ равна, по определению, количеству натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с ним.

Задача 4.2. а) Найдите сумму $\sum\limits_{d|n} \varphi(d)$.

б) Докажите, что $\sum\limits_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)$, где $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ — каноническое разложение числа n.

▷ Обозначим через $T_r(n)$ количество способов раскрасить карусель из n вагончиков в r цветов, т. е. число раскрасок вершин правильного n-угольника в r цветов, если раскраски, совмещающиеся поворотом, неотличимы. При этом

- в раскраске могут быть использованы не все цвета;
- цвета различны: например, раскраски КККЖ и ЖЖЖК различны.

Приведем более формальное определение. Для любой раскраски карусели можно «разорвать» карусель между любыми двумя вагончиками и записать получившуюся последовательность цветов (раскраску поезда), начиная с места разрыва по часовой стрелке. Например, следующие последовательности соответствуют одной и той же раскраске карусели:

КЖЗС; ЖЗСК; ЗСКЖ; СКЖЗ.

С другой стороны, из каждой последовательности цветов можно получить раскраску карусели, «склеив» её начало и конец правильным образом.
Циклическим сдвигом последовательности $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется последовательность $(a_2, a_3, \ldots, a_1)$. Формально, *раскраской карусели* (или, более учено, *циклической последовательностью*) называется класс эквивалентности последовательностей с точностью до циклического сдвига. Итак, $T_r(n)$ — количество циклических последовательностей длины n, элементы которых — числа $1, \ldots, r$.

Задача 4.3. а) Найдите $T_r(n)$ при $n = 3, 4, 5, 6, 9$.
б) Докажите, что $2^{2^n-n-1} < T_2(2^n) < 2^{2^n-n}$.

Задача 4.4. а) Докажите, что период последовательности делит её длину.
б) Если d делит n, то количество последовательностей длины n и периода d равно количеству последовательностей длины d и периода d. Докажите это.

Задача 4.5. а) Найдите $\sum\limits_{d|n} M_r(d)$.
б) Выразите $T_r(n)$ через все $M_r(d)$, где $d \mid n$.
в) Докажите, что $T_r(n) = \sum\limits_{l|n} \frac{1}{l} \sum\limits_{d|l} \mu(d) r^{\frac{l}{d}}$.
г) Докажите, что $T_r(n) = \frac{1}{n} \sum\limits_{d|n} \varphi(d) r^{\frac{n}{d}}$.

Задача 4.6. Найдите количество различных раскрасок карусели из n вагончиков в r цветов, в которых
а) цвет s встречается n_s раз для каждого $s = 1, \ldots, r$ (в качестве ответа принимается формула с суммированием по делителям, аналогичная формуле из пункта в) задачи 4.5);
б) присутствует ровно 4 цвета из $r = 5$ данных.