Материалы к семинарам по матанализу (четвёртый семестр)

11-я и 12-я недели (01.04 — 12.04.2019)

Примерные задачи семинаров

Преобразование Фурье в $\mathbb{R}^n$

Задача 6.1. Докажите, что пространство быстро убывающих функций

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid x^n f^{(m)}(x) \to 0 \text{ при } x \to \infty\}$$

а) содержит ненулевой элемент, б) бесконечномерно.

Задача 6.2. а) Докажите, что пространство быстро убывающих функций образует алгебру над $\mathbb{R}$ относительно стандартных арифметических операций.
б) Замкнуто ли оно относительно дифференцирования?
в) Замкнуто ли оно относительно свёртки?

Пусть $a = (a_1, \dots, a_n)$ — мультииндекс, то есть набор чисел $k_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда положим $|a| = a_1 + \dots + a_n$, $D^a f = \dfrac{\partial^{|a|} f}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_n^{a_n}}$.

Задача 6.3. Запишите в мультииндексных обозначениях многомерную формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (как определить $a!$ и $(x - x_0)^a$?).

Задача 6.4*. Дайте определение пространства быстро убывающих функций $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Верны ли для него аналоги утверждений задач 6.1 и 6.2?

Задача 6.5. Докажите, что:
а) $\mathcal{F}(D_k f) = i\alpha_k \mathcal{F}(f)$, б) $\mathcal{F}(D^a f) = (i\alpha)^a \mathcal{F}(f)$, в) $\mathcal{F}(P(D)f) = P(i\alpha)\mathcal{F}(f)$.

Задача 6.6. При каких значениях α следующие функции f принадлежат $L_2(\mathbb{R}^n)$:
а) $f = (1 + r)^\alpha$; б) $f = r^\alpha \chi_{\{r \le 1\}}$; в) $f = r^\alpha$; г) $f(x, y) = (1 + |xy|)^\alpha$, $n = 2$?

Задача 6.7. Пусть $f \in C^{n+1,0}(\mathbb{R}^n)$. Докажите, что $\hat{f}$ принадлежит $L_2(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$.

Задача 6.8. Выразите преобразование Фурье произведения финитных функций $f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$ через преобразования Фурье самих функций.

Задача 6.9. Найдите многомерное преобразование Фурье следующих функций:
а) $f(x_1, \dots, x_n) = \chi_{\{|x_1|, \dots, |x_n| \le 1\}}$,
б) $f(x_1, \dots, x_n) = e^{-\frac{1}{2}||x||^2}$.

Задача 6.10. Пусть $\det C \ne 0$. Докажите, что $\mathcal{F}(f(Cx)) = \det(C^{-1})\mathcal{F}(f)((C^{-1})^T\alpha)$. Сравните с одномерной формулой. Как упрощается эта формула при $C \in SO(n)$?

Задача 6.11. Найдите многомерное преобразование Фурье следующих функций:
а) $f(x, y) = e^{-\frac{3x^2 - 2xy + 3y^2}{2}}$,
б) $f(x, y) = \chi_{\{|x+y|, |x-y| \le 1\}}$.

Задача 6.12. Пусть финитная функция инвариантна относительно
а) группы всех вращений (ортогональных замен переменных, сохраняющих начало координат),
б) данной подгруппы G группы вращений.
Верно ли то же самое для ее преобразования Фурье?

Задача 6.13. Не медленнее, чем какая степень $\|\xi\|$ убывает преобразование Фурье функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \|x\|^2(1 - \|x\|)^2, & \|x\| \le 1, \\ 0, & \|x\| > 1? \end{cases}$$

Уравнение теплопроводности

Задача 6.14. Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности $u_{xx} = u_t$, то есть зададим начальное условие $u(x,0) = \varphi(x)$. Докажите, что если φ — непрерывная ограниченная функция на прямой, то формула Пуассона

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4t} \varphi(y)\, dy$$

даёт решение задачи Коши:
а) для такой функции u выполнено уравнение $u_{xx} = u_t$,
б) она удовлетворяет начальному условию, то есть $u(x,t) \to \varphi(x_0)$ при $t \to 0$, $x \to x_0$.

Задача 6.15. Решите задачу Коши для уравнения теплопроводности со следующими начальными условиями:
а) $\varphi(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$; б) $\varphi(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.
Указание. Формулу Пуассона можно записать с помощью свёртки.

Задача 6.16* Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности на окружности $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Докажите, что если начальное условие $\varphi \in C^2(S^1)$ разлагается в ряд Фурье $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ikx}$, то решение задачи Коши можно найти в виде

$$u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ikx - k^2 t}.$$

Волновое уравнение на прямой

Напомним, что динамика натянутой струны длины L описывается *волновым уравнением* $c^2 u_{xx} = u_{tt}$.

Задача 6.17. Докажите, что функции вида $u(x,t) = f(x - ct)$ или $u(x,t) = f(x + ct)$ (волна, бегущая влево или вправо) являются решениями волнового уравнения, если функция f достаточно гладкая.

Задача 6.18. Будем решать *задачу Коши* для волнового уравнения, т. е. будем искать решение, удовлетворяющее начальным условиям $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(t)$. Докажите, что (если функции φ и ψ достаточно гладкие) можно подобрать решение вида $u(x,t) = f(x + ct) + g(x - ct)$. Докажите, что полученное решение удовлетворяет *формуле Даламбера*:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)\, dy.$$

Задача 6.19. Постройте с помощью формулы Даламбера решения со следующими начальными условиями и опишите качественно их поведение, нарисовав «мультфильм» — последовательность графиков $u(x,t)$ при различных t:
а) $u(x,0) = \sin(\omega t)$, $u_t(x,0) = 0$,
б) $u(x,0)$ — «пила»: кусочно-линейная функция с периодом T, график которой имеет изломы в точках (kT, a) и $(kT + T/2, -a)$, $u_t(x,0) = 0$,
в) $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = \chi_{[-a,a]}(x)$,
г) $u(x,0) = \max(0, 1 - |x|)$, $u_t(x,0) = 0$,
д) $u(x,0) = \max(0, 1 - |x + 5|) + \max(0, 1 - |x - 5|)$, $u_t(x,0) = 0$,
е) $u(x,0) = \max(0, 1 - |x + 5|) - \max(0, 1 - |x - 5|)$, $u_t(x,0) = 0$.

Задача 6.20. Будем решать задачу Коши для волнового уравнения на полупрямой $[0, +\infty)$.
а) Покажите, что решение такой задачи неединственно.
б) Зададим дополнительно *краевое условие* $u(0,t) = 0$ (конец струны неподвижно закреплён). Найдите соответствующее решение $u(x,t)$.
в) Тот же вопрос для краевого условия $u_t(0,t) = 0$ (конец струны скользит без трения по вертикальному стержню).
г) Тот же вопрос для уравнения на отрезке $[0, L]$ с условиями $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

Задача 6.21. а) Найдите все решения волнового уравнения на прямой, имеющие вид $u(x,t) = X(x)T(t)$ (стоячие волны).
б) Какие из этих решений удовлетворяют условиям $u(0,t) = u(L,t) = 0$? Сравните два описания соответствующего решения — как суммы волн, бегущих влево и вправо, и как стоячей волны.

Задача 6.22.* Рассмотрим бесконечную струну, натянутую с силой T, в которой положительная и отрицательная половина имеют различные плотности (массу, приходящуюся на единицу длины) ρ_+ и ρ_-. Её динамика струны при положительных/отрицательных x описывается уравнениями $c_\pm^2 u_x = u_t t$ (чему равны $c_\pm$?).
а) Найдите условие склейки решений в точке $x = 0$.
б) Решите соответствующую задачу Коши с начальным условием $u(x,0) = \max(0, 1-|x-5|)$, $u_t(x,0) = 0$.
в) Что будет происходить с решением, если ρ_+ постоянно, а ρ_- стремится к нулю либо к бесконечности?

Преобразование Фурье на прямой. Дополнительные задачи

Задача 6.23. Пусть f — интегрируемая функция на прямой, $\hat{f} = g$. Найдите преобразование Фурье функции $(\sin x)^2 f(x)$.

Задача 6.24.* Пусть f — интегрируемая функция на прямой с преобразованием Фурье g. Доказать, что функции

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} g(y) \exp(-\varepsilon y^2) dy$$

сходятся к f в L^1 при $\varepsilon \to 0$.

Задача 6.25. Докажите, что оператор $\mathcal{F}$ (нормированного) преобразования Фурье на пространстве $L^2(\mathbb{R})$ не может иметь собственных функций с собственными значениями, отличными от ± 1 и $\pm i$.

Определим *полиномы Эрмита* формулами

$$He_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2} \qquad \text{(«вероятностные»)},$$
$$H_n(x) = (-1)^n e^{x} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \qquad \text{(«физические»)}.$$

Задача 6.26.* а) Выразите H_n через He_n и наоборот.
б) Докажите, что He_n — полином степени n и найдите его старший коэффициент.
в) Докажите, что полиномы Эрмита He_n ортогональны в пространстве $L_2(\mathbb{R}, e^{-x^2/2}\, dx)$, то есть

$$\int_{\mathbb{R}} He_n(x) He_m(x) e^{-x^2/2}\, dx = 0, \qquad m \neq n.$$

г) Найдите норму He_n относительно того же скалярного произведения.
Задача 6.27.* Докажите, что подпространство функций вида $p(x)e^{-x^2/2}$, где $p(x)$ — многочлен, плотно в $L_2(\mathbb{R})$.
Указание. Для функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ из его ортогонального дополнения напишите преобразование Фурье функции $f(x)e^{-x^2/2}$ и разложите в нём экспоненту $e^{-ix\xi}$ в ряд Тейлора.

Задача 6.28. а) Докажите, что $\frac{d}{dx} + x = e^{-x^2/2} \frac{d}{dx} e^{x^2/2}$, то есть формулы $(\mathcal{D}_1 f)(x) = f'(x) + xf(x)$ и $(\mathcal{D}_1 f)(x) = e^{-x^2/2} \frac{d}{dx}(e^{x^2/2} f(x))$ задают один и тот же дифференциальный оператор.
б) Докажите, что $\mathcal{F} \circ \mathcal{D}_1 = i\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{F}$.
в) Докажите, что $\mathcal{F}(x^n e^{-x^2/2}) = (-i)^n He_n(x) e^{-x^2/2}$, и потому $V_n = \{p(x)e^{-x^2/2} : p \in \mathbb{C}[x], \deg p \leq n\}$ — инвариантное подпространство преобразования Фурье $\mathcal{F}$.

Задача 6.29. а) Пусть $\mathcal{D}_k = \left(\frac{d}{dx}\right)^k + (-1)^{k+1} x^k$. Проверьте, что $\mathcal{F} \circ \mathcal{D}_k = (-i)^{k+2} \mathcal{D}_k \circ \mathcal{F}$. В частности, $\mathcal{D}_2$ и $\mathcal{F}$ — коммутирующие операторы, переводящие пространство V_n в себя.
б) Пусть $p(x)e^{-x^2/2}$ — собственная функция $\mathcal{D}_2$. Напишите рекуррентное соотношение на коэффициенты многочлена p. Каково может быть соответствующее собственное значение?

в) Проверьте, что многочлены $p(x) = H_n(x)$ удовлетворяют этому соотношению.
г) Докажите, что $H_n(x)e^{-x^2/2}$ — собственные функции оператора $\mathcal{F}$ и найдите соответствующие собственные значения.

Задача 6.30. Вычислите преобразование Фурье для функции $\operatorname{sech}(\alpha x)$ (напомним, что $\operatorname{sech}(x) = 1/\operatorname{ch} x$ — это *гиперболический секанс*). Покажите, что при $\alpha = \sqrt{\pi/2}$ она является собственной функцией преобразования Фурье с собственным значением 1.
Указание. Используйте периодичность этой функции в комплексной области и выберите подходящий контур для интегрирования.

Таблица преобразований Фурье

$f(x)$	$\chi_{[-1,1]}$	$e^{-x^2/2}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$g(ax)$	$g(x+b)$	$e^{cx}g(x)$
$\tilde{f}(y)$	$\frac{2\sin(y)}{y}$	$\sqrt{2\pi}e^{-y^2/2}$	$\pi e^{-\lvert y\rvert}$	$\frac{1}{a}\tilde{g}\left(\frac{y}{a}\right)$	$e^{iby}\tilde{g}(y)$	$\tilde{g}(y+ic)$