

СЕМИНАР 1.
МОДЕЛЬ ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНОЙ МАТРИЧНОЙ ГРУППЫ
(ДЛЯ МАТЕМАТИКОВ МЛАДШЕГО ВОЗРАСТА)

А.А.КИРИЛЛОВ

Здесь я приведу несколько фактов, либо хорошо известных специалистам, либо содержащихся в моих лекциях в ВШЭ.

1. СУММА РАЗМЕРНОСТЕЙ УНЕПРЕДОВ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

Теорема 1. Пусть G - конечная группа, у которой все унепреды принадлежат вещественному типу. Тогда справедливо тождество

$$(1) \quad \sum_{\lambda \in \widehat{G}} \dim \pi_\lambda = |\text{Inv}(G)|,$$

где $\text{Inv}(G)$ - множество всех инволюций в G .

Доказательство. Рассмотрим линейный оператор T в пространстве $\mathbb{C}[G]$, действующий по формуле

$$(Tf)(g) = f(g^{-1}).$$

След этого оператора можно вычислить двумя способами. Если выбрать в $\mathbb{C}[G]$ базис из дельта-функций $\delta_g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = g \\ 0, & \text{если } x \neq g \end{cases}$, то след T равен числу элементов $g \in G$, для которых $g = g^{-1}$, то-есть числу инволюций.

С другой стороны, если сделать преобразование Фурье

$$\tilde{f}(\lambda) = \sum_{g \in G} f(g) \pi_\lambda(g)$$

и учесть, что для унепредов вещественного типа (то-есть, ортогональных) $\pi_\lambda(g^{-1}) = \pi_\lambda(g)^t$, то оператор T перейдет в оператор \tilde{T} , действующий по формуле $(\tilde{T}\tilde{f})(\lambda) = \tilde{f}(\lambda)^t$. В пространстве $(d \times d)$ -матриц оператор транспонирования имеет след d . Поэтому след \tilde{T} равен сумме размерностей всех унепредов G . \square

Известно также, что для общих групп в левой части (1) должна стоять сумма размерностей, умноженных на индекс Шура $\text{ind } \pi_\lambda$.

2. Инволюции в группе $G_n(\mathbb{F}_2)$

2.1. Пример Айзекса-Карагезяна. Однажды я высказал наивную гипотезу, что все унепреды группы $G_n(\mathbb{F}_2)$ принадлежат вещественному типу и для них справедлива простая формула для характеров, вытекающая из идеологии метода орбит. Оказалось, однако, что это верно только для $n \leq 12$, а группа $G_{13}(\mathbb{F}_2)$ имеет ровно два унепреда комплексного типа.

В работе “Conjugacy in Groups of Upper Triangular Matrices, ERRATUM” by I. M. Isaacs and Dikran Karagueuzian, JOURNAL OF ALGEBRA, vol. 208, p.722 (1998) утверждается, что матрица $g \in G_{13}(\mathbb{F}_2)$, приведенная ниже, не сопряжена своей обратной и что это - единственный пример такого рода в размерностях $n \leq 13$.

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2. Многообразие \mathcal{M}_n . Мы знаем, что тождество (1) справедливо для группы $G_n(\mathbb{F}_2)$ при $n \leq 12$. Возникает мысль, что в этом случае, как и для симметрической группы S_n существует модель, действующая в пространстве сечений некоторого линейного расслоения L над множеством $Inv(G_n(\mathbb{F}_2))$.

Рассмотрим это множество подробнее. Оно состоит из верхне-треугольных матриц $g = 1 + A$, для которых $g^2 = 1$. Но над полем \mathbb{F}_q для случая четного $q = 2^k$ мы имеем $(1 + A)^2 = 1 + A^2$. Поэтому существует взаимно однозначное соответствие между $Inv(G_n(\mathbb{F}_q))$ и множеством $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$, где \mathcal{M}_n - алгебраическое подмногообразие в пространстве \mathfrak{g}_n верхне-треугольных матриц, заданное уравнением $A^2 = 0$.

Пример 1. Многообразие \mathcal{M}_3 состоит из матриц $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & b \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

удовлетворяющих уравнению $ab = 0$. Оно приводимо и состоит из двух

компонент, определяемых уравнениями $a_1 = 0$ и $a_2 = 0$. Каждая компонента является аффинной плоскостью \mathbb{A}^2 и эти плоскости пересекаются по аффинной прямой \mathbb{A}^1 , заданной уравнениями $a_1 = a_2 = 0$.

Над конечным полем \mathbb{F}_q каждая компонента содержит q^2 точек, из которых q - общие. Полное число точек равно $2q^2 - q$.

Пример 2. Многообразие \mathcal{M}_4 состоит из матриц $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 & c \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
удовлетворяющих уравнениям

$$a_1 a_2 = 0, \quad a_2 a_3 = 0, \quad a_1 b_2 + b_1 a_3 = 0.$$

Оно также состоит из двух компонент, определяемых парами уравнений:

$$\text{I. } a_1 = 0, \quad a_3 = 0; \quad \text{II. } a_2 = 0, \quad a_1 b_2 + b_1 a_3 = 0.$$

Первая компонента является аффинным пространством \mathbb{A}^4 , а вторая - произведением прямой \mathbb{A}^1 и 3-мерной квадратики. Пересечение этих компонент является аффинной прямой \mathbb{A}^3 , заданной уравнениями $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Над конечным полем \mathbb{F}_q первая компонента содержит q^4 точек, а вторая - $q^4 + q^3 - q^2$ точек, из которых q^3 - общие.

Полное число точек равно $2q^4 - q^2$.

2.3. Многочлены P_λ . В лекции 3 мы ввели обозначение $\mathfrak{g}_\lambda(K)$ для множества верхне-треугольных нильпотентных матриц данного Жорданова типа $\lambda \in \mathcal{P}$ с коэффициентами из поля K . Мы рассматриваем $\mathfrak{g}_\lambda(K)$ как множество K -точек квазиаффинного алгебраического многообразия \mathfrak{g}_λ .¹

В общем случае \mathcal{M}_n является объединением квазиаффинных подмногообразий \mathfrak{g}_λ , где λ пробегает разбиения вида $1^k 2^m$, $k + 2m = n$.

Для разбиений такого вида числа один из участников нашего семинара нашел явную формулу для P_λ , показывающую, что это - многочлен общего типа.

Мои вычисления многочленов P_λ до $|\lambda| = 8$, приведенные ниже, также подтверждают это:

Table of $P_\lambda(q)$, $|\lambda| \leq 8$.

¹Квазиаффинным алгебраическим многообразием называется разность двух аффинных многообразий. Такое многообразие определяется системой алгебраических уравнений и неравенств.

$$\begin{aligned}
P_1 &= 1, \\
P_2 &= q - 1, \\
P_{1^2} &= 1, \\
P_3 &= q^3 - 2q^2 + q, \\
P_{2,1} &= 2q^2 - q - 1, \\
P_{1^3} &= 1, \\
P_4 &= q^6 - 3q^5 + 3q^4 - q^3, \\
P_{3,1} &= 3q^5 - 5q^4 + q^3 + q^2, \\
P_{2^2} &= 2q^4 - 3q^3 + q, \\
P_{21^2} &= 3q^3 - q^2 - q - 1, \\
P_{1^4} &= 1, \\
P_5 &= q^{10} - 4q^9 + 6q^8 - 4q^7 + q^6, \\
P_{4,1} &= 4q^9 - 11q^8 + 9q^7 - q^6 - q^5, \\
P_{3,2} &= 5q^8 - 11q^7 + 4q^6 + 4q^5 - q^4 - q^3, \\
P_{3,1^2} &= 6q^7 - 9q^6 + q^5 + q^4 + q^3, \\
P_{2^2,1} &= 5q^6 - 4q^5 - 4q^4 + q^3 + q^2 + q, \\
P_{2,1^3} &= 4q^4 - q^3 - q^2 - q - 1, \\
P_{1^5} &= 1, \\
P_6 &= q^{15} - 5q^{14} + 10q^{13} - 10q^{12} + 5q^{11} - q^{10}, \\
P_{5,1} &= 5q^{14} - 19q^{13} + 26q^{12} - 14q^{11} + q^{10} + q^9, \\
P_{4,2} &= 9q^{13} - 31q^{12} + 35q^{11} - 10q^{10} - 5q^9 + q^8 + q^7, \\
P_{4,1^2} &= 10q^{12} - 26q^{11} + 19q^{10} - q^9 - q^8 - q^7, \\
P_{3^2} &= 5q^{12} - 16q^{11} + 15q^{10} - 5q^8 + q^6, \\
P_{3,2,1} &= 16q^{11} - 24q^{10} - 10q^9 + 19q^8 + 4q^7 - 2q^6 - 2q^5 - q^4, \\
P_{3,1^3} &= 10q^9 - 14q^8 + q^7 + q^6 + q^5 + q^4, \\
P_{2^3} &= 5q^9 - 9q^8 + 5q^6 - q^3, \\
P_{2^2,1^2} &= 9q^8 - 5q^7 - 5q^6 - 4q^5 + q^4 + 2q^3 + q^2 + q, \\
P_{2,1^4} &= 5q^5 - q^4 - q^3 - q^2 - q - 1, \\
P_{1^6} &= 1, \\
P_7 &= q^{21} - 6q^{20} + 15q^{19} - 20q^{18} + 15q^{17} - 6q^{16} + q^{15}, \\
P_{6,1} &= 6q^{20} - 29q^{19} + 55q^{18} - 50q^{17} + 20q^{16} - q^{15} - q^{14}, \\
P_{5,2} &= 14q^{19} - 64q^{18} + 111q^{17} - 85q^{16} + 20q^{15} + 6q^{14} - q^{13} - q^{12}, \\
P_{5,1^2} &= 15q^{18} - 55q^{17} + 71q^{16} - 34q^{15} + q^{14} + q^{13} + q^{12}, \\
P_{4,3} &= 14q^{18} - 56q^{17} + 76q^{16} - 29q^{15} - 15q^{14} + 6q^{13} + 6q^{12} - q^{11} - q^{10}, \\
P_{4,2,1} &= 35q^{17} - 97q^{16} + 58q^{15} + 44q^{14} - 40q^{13} - 5q^{12} + 2q^{11} + 2q^{10} + q^9, \\
P_{4,1^3} &= 20q^{15} - 50q^{14} + 34q^{13} - q^{12} - q^{11} - q^{10} - q^9, \\
P_{3^2,1} &= 21q^{16} - 56q^{15} + 29q^{14} + 29q^{13} - 20q^{12} - 6q^{11} + q^{10} + q^9 + q^8, \\
P_{3,2^2} &= 21q^{15} - 49q^{14} + 14q^{13} + 29q^{12} - 6q^{11} - 6q^{10} - 6q^9 + q^8 + q^7 + q^6, \\
P_{3,2,1^2} &= 35q^{14} - 43q^{13} - 23q^{12} + 11q^{11} + 25q^{10} + 4q^9 - 3q^8 - 3q^7 - 2q^6 - q^5, \\
P_{3,1^4} &= 15q^{11} - 20q^{10} + q^9 + q^8 + q^7 + q^6 + q^5, \\
P_{2^3,1} &= 14q^{12} - 14q^{11} - 14q^{10} - 6q^9 - 6q^8 - 6q^7 - q^6 - q^5 - q^4 - q^3, \\
P_{2^2,1^3} &= 14q^{10} - 6q^9 - 6q^8 - 5q^7 - 5q^6 + 2q^5 + 2q^4 + 2q^3 + q^2 + q, \\
P_{2,1^5} &= 6q^6 - q^5 - q^4 - q^3 - q^2 - q - 1, \\
P_{1^7} &= 1, \\
P_8 &= q^{28} - 7q^{27} + 21q^{26} - 35q^{25} + 35q^{24} - 21q^{23} + 7q^{22} - q^{21}, \\
P_{7,1} &= 7q^{27} - 41q^{26} + 99q^{25} - 125q^{24} + 85q^{23} - 27q^{22} + q^{21} + q^{20}, \\
P_{6,2} &= 20q^{26} - 113q^{25} + 259q^{24} - 301q^{23} + 175q^{22} - 35q^{21} - 7q^{20} + q^{19} + q^{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{6,1^2} &= 21q^{25} - 105q^{24} + 210q^{23} - 210q^{22} + 105q^{21} - 21q^{20} \\
P_{5,3} &= 28q^{25} - 148q^{24} + 307q^{23} - 301q^{22} + 119q^{21} + 7q^{20} - 7q^{19} - 7q^{18} + q^{17} + q^{16} \\
P_{5,2,1} &= 64q^{24} - 266q^{23} + 392q^{22} - 204q^{21} - 29q^{20} + 41q^{19} + 6q^{18} - 2q^{17} - q^{16} - q^{15} \\
P_{5,1^3} &= 35q^{22} - 125q^{21} + 155q^{20} - 69q^{19} + q^{18} + q^{17} + q^{16} + q^{15} \\
P_{4^2} &= 14q^{24} - 70q^{23} + 132q^{22} - 105q^{21} + 14q^{20} + 21q^{19} - 7q^{17} + q^{15} \\
P_{4,3,1} &= 70q^{23} - 265q^{22} + 316q^{21} - 43q^{20} - 148q^{19} + 55q^{18} + 20q^{17} - q^{16} - 2q^{15} - 2q^{14} \\
P_{4,2^2} &= 56q^{22} - 202q^{21} + 218q^{20} + q^{19} - 119q^{18} + 35q^{17} + 7q^{16} + 7q^{15} - q^{14} + q^{13} - q^{12} \\
P_{4,2,1^2} &= 90q^{21} - 280q^{20} + 254q^{19} - 10q^{18} - 70q^{17} + 14q^{16} + q^{14} + q^{11} \\
P_{4,1^4} &= 35q^{18} - 85q^{17} + 55q^{16} - q^{15} - q^{14} - q^{13} - q^{12} - q^{11} \\
P_{3^2,2} &= 42q^{21} - 147q^{20} + 148q^{19} + 15q^{18} - 84q^{17} + 14q^{16} + 7q^{15} + 7q^{14} - q^{12} - q^{11} \\
P_{3^2,1^2} &= 56q^{20} - 134q^{19} + 44q^{18} + 68q^{17} - 6q^{16} - 27q^{15} - 6q^{14} + q^{13} + 2q^{12} + q^{11} + q^{10} \\
P_{3,2^2,1} &= 70q^{19} - 155q^{18} + 29q^{17} + 76q^{16} + 8q^{15} - 27q^{14} - 8q^{13} + q^{12} + 2q^{11} + 2q^{10} + 2q^9 \\
P_{3,2,1^3} &= 64q^{17} - 98q^{16} - 2q^{15} + 12q^{14} + 25q^{13} + 11q^{12} - 3q^{11} - 4q^{10} - 3q^9 - q^8 - q^7 \\
P_{3,1^5} &= 21q^{13} - 27q^{12} + q^{11} + q^{10} + q^9 + q^8 + q^7 + q^6 \\
P_{2^4} &= 14q^{16} - 28q^{15} + 20q^{13} - 7q^{11} + q^7 \\
P_{2^3,1^2} &= 28q^{15} - 20q^{14} - 20q^{13} - 13q^{12} + 7q^{11} + 14q^{10} + 6q^9 + 6q^8 - 2q^7 - 2q^6 - 2q^5 - q^4 - q^3 \\
P_{2^2,1^4} &= 20q^{12} - 7q^{11} - 7q^{10} - 6q^9 - 6q^8 - 5q^7 + 2q^6 + 3q^5 + 2q^4 + 2q^3 + q^2 + q \\
P_{2,1^6} &= 7q^7 - q^6 - q^5 - q^4 - q^3 - q^2 - q - 1 \\
P_{1^8} &= 1
\end{aligned}$$

Table of $P_{2^2,k}$

$k \setminus d$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	1	0	-3	2														
1	1	1	1	-4	-4	5												
2	1	1	2	1	-4	-4	-5	9										
3	1	1	1	2	2	-5	-5	-6	-6	14								
4	1	1	2	2	3	2	-5	-6	-6	-7	-7	20						
5	1	1	2	2	3	3	3	-6	-6	-7	-7	-8	-8	27				
6	1	1	2	2	3	3	4	3	-6	-7	-7	-8	-8	-9	-9	35		
7	1	1	2	2	3	3	4	4	4	-7	-7	-8	-8	-9	-9	-10	-10	44
8	1	1	2	2	3	3	4	4	5	4	-7	-8	-8	-9	-9	-10	-10	-11

Table of $P_{2^3,k}$

$k \setminus d$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	-1	0	0	5	0	-9	5									
1	-1	-1	-1	-1	6	6	6	-14	-14	14						
2	-1	-1	-2	-2	-2	6	6	14	7	-13	-20	-20	28			
3	-1	-1	-2	-3	-3	-3	5	6	15	15	16	-19	-19	-27	-27	48
4	-1	-1	-2	-3	-4	-4	-5	5	5	15	16	26	17	-17	-26	-26

2.4. **Многочлены A_n, B_n, C_n, \dots** Вычисления показывают, что суммы многочленов P_λ по всем диаграммам λ , имеющим $\leq k$ столбцов, по-видимому, на самом деле являются "малочленами".

Мне удалось сосчитать аналогичные суммы $B_n := \sum_{k+2l+3m=n} P_{1^k 2^l 3^m}$ и $C_n := \sum_{k+2l+3m+4p=n} P_{1^k 2^l 3^m 4^p}$, но только для $n \leq 7$. Вот результат:

$$\begin{array}{ll}
 B_0 = 1 & C_0 = 1 \\
 B_1 = 1, & C_1 = 1 \\
 B_2 = q, & C_2 = q \\
 B_3 = q^3, & C_3 = q^3 \\
 B_4 = 3q^5 - 3q^4 + q^3, & C_4 = q^6 \\
 B_5 = 5q^8 - 5q^7 + q^5, & C_5 = 4q^9 - 6q^8 + 4q^7 - q^6 \\
 B_6 = 5q^{12} - 9q^{10} + 5q^9, & C_6 = 9q^{13} - 16q^{12} + 9q^{11} - q^9 \\
 B_7 = 21q^{16} - 35q^{15} + 15q^{14}, & C_7 = 14q^{18} - 21q^{17} + 14q^{16} - 6q^{14}
 \end{array}$$

Очевидно, эти многочлены во многом похожи на многочлены A_n и для них, весьма вероятно, тоже есть общая формула.

3. ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЯ \mathcal{M}_n И КОМБИНАТОРИКА

Структура $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_2)$ связана по крайней мере с тремя комбинаторными объектами - размещением ладей на шахматных досках, разбиениями конечного множества на подмножества и с так называемыми "домиками".

3.1. Ладейные размещения. Под шахматной доской мы понимаем здесь любую область плоскости, разбитую на квадратные клетки одинакового размера и ориентации без общих внутренних точек. Достаточное число интересных примеров дают диаграммы Юнга. Для нас особый интерес представляет треугольная доска D_n из $\binom{n}{2}$ клеток - диаграмма разбиения $\tau_n : (n-1, n-2, \dots, 2, 1)$.

Выбор m "отмеченных" клеток (в каждой из которых мы мысленно помещаем шахматную ладью) называется **ладейным m -размещением** (в англоязычной литературе - rook m -placement), если в каждой строке и в каждом столбце есть не более одной отмеченной клетки. Обычно размещение задается списком координат отмеченных точек: $P = \{(i_1, j_1), \dots, (i_m, j_m)\}$. Для размещения на D_n , эти координаты удовлетворяют условиям $1 \leq i_s < j_s \leq n$, причем все $2m$ чисел i_s, j_s различны.

“Нетрудно установить, что матрица $X \in \mathfrak{g}_n(\mathbb{F}_2)$ удовлетворяет условию $X^2 = 0$, тогда и только тогда, когда клетки, содержащие единицу, образуют ладейное размещение на диаграмме D_n . ” – Неправда!!

С другой стороны, если перестановка $s \in S_n$ удовлетворяет условию $s^2 = e$, то её матрица M симметрична (поскольку $M^t = M^{-1} = M$). Поэтому матричные элементы, равные 1, занимают $k = n - 2m$ диагональных клеток и m пар внедиагональных клеток, расположенных симметрично относительно диагонали. Те из них, которые лежат выше диагонали, образуют ладейное m -размещение.

3.2. Разбиения множеств. Назовем m -разбиением конечного множества X представление его в виде объединения m непустых дизъюнктивных подмножеств: $X = \bigsqcup_{k=1}^m X_k$. Число таких разбиений в комбинаторике называется **числом Стирлинга второго рода** и обозначается $S(n, m)$ или $\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$.

Таблица значений $S(n, m)$ при $0 \leq n, m \leq 9$ имеет вид

$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

Связь чисел Стирлинга с ладейными размещениями основана на следующем наблюдении. Для каждого ладейного размещения $P = \{(i_1, j_1), \dots, (i_m, j_m)\}$ на D_n рассмотрим такие отношения эквивалентности на $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$, при которых i_s эквивалентно j_s для $1 \leq s \leq m$. Обозначим через R_P минимальное из таких отношений.

Легко видеть, что для m -размещения P отношение R_P имеет $n - m$ классов эквивалентности: пустое размещение соответствует разбиению на отдельные точки, а каждая новая ладья уменьшает число классов на единицу. Поэтому число m -размещений на D_n равно числу Стирлинга $S(n, n - m)$.

Интересно, что число m -размещений на D_n зависит от m не монотонно. Оно равно 1 для $m = 0$, растет до максимального значения и потом снова убывает до нуля при $m = n$. Максимальное значение достигается для одного или двух соседних значений $m \approx \frac{n}{\log n}$. Логарифм этого максимального значения равен $n \log n - n \log \log n + O\left(\frac{n \log \log n}{\log n}\right)$.

3.3. Домики. Еще одно комбинаторное понятие: "дуговые картинки" (от английского link-patterns), которое я предпочитаю называть "домиками", было изобретено математиками для изучения петлевых конфигураций и использовано в работах А.Мельниковой (см. Ссылки ниже).

Пусть $P = \{(i_1, j_1), \dots, (i_m, j_m)\}$ - ладейное m -размещение на D_n . Число m назовем размером домика. Расположим точки $1, 2, \dots, n$ на прямой и соединим каждую пару (i_s, j_s) ломаной линией - "крышей домика". Некоторые точки останутся изолированными (число их равно $k = n - 2m$). Введем также наглядные понятия пересечения крыш и

накрытия изолированных точек; например, на рисунке ниже, где $n = 10$, $P = \{(2, 7), (3, 4), (6, 10)\}$ мы имеем 3 крыши (с вершинами a, b, c над точками $5, 4, 8$), изолированные точки $(1, 4, 7, 9)$, одно пересечение и 5 накрытий (точки 4 и 7 накрыты дважды, точка 8 один раз, а точка 1 не накрыта)

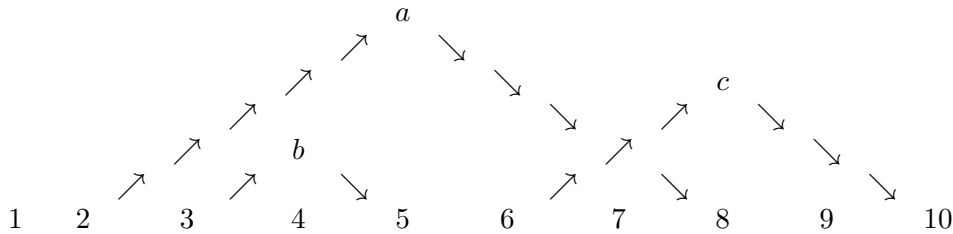


Рис.1

Следующий красивый факт обнаружила Анна Мельникова:²

Теорема 3. *Размерность B -орбиты в \mathfrak{g}_n , содержащей элемент $A = \sum_{s=1}^m E_{i_s, j_s}$, равна*

$$\dim O(A) = m(n - m)cr(P)cov(P),$$

где $cr(P)$ - число пересечений (crossing), а $cov(P)$ - число накрытий (cover).

Следствием этой теоремы является тот факт, что классы максимальной размерности связаны с такими размещениями, у которых нет ни пересечений, ни накрытий, а количество изолированных точек минимально: одна для n нечетного и ни одной для n четного.

В самом деле, поскольку $m = \frac{n-k}{2}$, то $m(n - m) = \frac{n^2 - k^2}{4}$. Так что при данном n произведение $m(n - m)$ максимально, когда k минимально.

Структура домиков, соответствующих классам максимальной размерности, довольно проста и красива, а число их для $n = 2k$ и для $n = 2k - 1$ равно k -ому числу Каталана $c_k = \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} = \binom{2k}{k} - \binom{2k}{k+1}$.

References (some of them)

[1] P. Di Francesco, P. Zinn-Justin, From Orbital Varieties to Alternating Sign Matrices, math-ph/0512047.

[2] F.Y.C.Fung On the topology of components of some Springer fibers and their relation to Kazhdan-Lusztig theory, Advances in Math. 178 (2003), pp. 244-276.

[3] J.J. Graham, G.I. Lehrer, Cellular algebras, Invent. Math. 123(1996), pp. 1-34.

[4] W. Hesselink, Singularities in the nilpotent scheme of a classical group, Trans. Am. Math. Soc. 222(1976), pp. 1-32.

²Я знал эту формулу для многих частных случаев, но не смог угадать правильную форму общего ответа.

- [5] A. Joseph, On the variety of a highest weight module, J. of Algebra 88 (1984), 238-278.
- [6] A. Knutson, P. Zinn-Justin, A scheme related to the Brauer loop model, math.AG/0503224.
- [7] A. Melnikov, Irreducibility of the associated varieties of simple highest weight modules in $\mathfrak{sl}(n)$, C.R.A.S. I, 316 (1993), 53-57.
- [8] A. Melnikov, Orbital varieties in \mathfrak{sl}_n and the Smith conjecture, J. of Algebra, 200(1998), pp.1-31.
- [9] A. Melnikov, B-orbits in solutions to the equation $X^2 = 2I$ in triangular matrices, J. of Algebra, 223(2000), pp. 101-108.
- [10] A. Melnikov, The combinatorics of orbital variety closures of nilpotent order 2 in \mathfrak{sl}_n , Electronic Journal of Combinatorics, vol. 12(1), 2005, R21.
- [11] A. Melnikov, Description of B-orbit closures of order 2 in upper-triangular matrices, Transformation Groups, Vol. 11 No. 2, 2006, pp. 217-247.

E-mail address: kirillov@math.upenn.edu