Модельное представление для $G_n(K)$, II.

А.А.КИРИЛЛОВ

Мы будем строить модельное представление Π для группы $G_n(K)$ в пространстве сечений некоторого 1-мерного комплексного векторного расслоения L_n над множеством $\mathcal{M}_n(K)$ всех верхне-треугольных матриц $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$, удовлетворяющих уравнению $A^2 = 0$.

1. Структура многообразия $\mathcal{M}_n$

Рассмотрим алгебраическое подмногообразие $\mathcal{M}_n$ в аффинном пространстве $\mathfrak{g}_n \simeq \mathbb{A}^{n(n-1)/2}$ верхне-треугольных нильпотентных матриц размера n, заданное уравнением $A^2 = 0$.

На $\mathcal{M}_n(K)$ действует сопряжениями группа $G_n(K)$: $A \mapsto gAg^{-1}$. Таким же образом действует и борелевская подгруппа $B_n(K)$, состоящая из верхне-треугольных матриц с ненулевыми элементами на диагонали. Кроме того, $\mathcal{M}_n(K)$ распадается на части $\mathfrak{g}_\lambda(K)$, $\lambda \in \mathcal{P}_n$, в соответствие с Жордановым типом матриц. Наконец, как всякое алгебраическое многообразие, $\mathcal{M}_n$ является объединением (не дизъюнктным!) неприводимых компонент $\mathcal{M}_n^{(s)}$, $1 \leq s \leq k_n$.

Ясно, что каждая часть $\mathcal{M}_\lambda(K)$ и каждая компонента $\mathcal{M}_n^{(s)}(K)$ переходят в себя под действием обеих групп. Поэтому, они являются дизъюнктными объединениеми $B_n(K)$-орбит, а каждая борелевская орбита является дизъюнктным объединением $G_n(K)$-орбит. Структура всех этих разбиений очень интересна и не до конца изучена.

Каждое разбиение $\mathcal{M}_n(K)$ на $G_n(K)$-инвариантные подмножества даёт разбиение Π в прямую сумму подпредставлений. Нас прежде всего интересует самое мелкое разбиение $\mathcal{M}_n(K)$ - разбиение на $G_n(K)$-орбиты. Как показано в части I, над каждой такой орбитой O соответствующее подпредставление имеет вид $\Pi_O \simeq \mathrm{Ind}_{Stab}^{G_n(K)} \rho$, где ρ - некоторое 1-мерное комплексное представление стабилизатора отмеченной точки в O.

Все прочие, более грубые, разбиения нужны только для того, чтобы лучше понять структуру множества $G_n(K)$-орбит в $\mathcal{M}_n(K)$.[1]

1.1. **Компоненты многообразия $\mathcal{M}_n$.** Формулировка и доказательство основной теоремы этого раздела потребуют некоторых сведений из комбинаторики.

Date: Весна 2019.

[1]Отметим, что в случае поля $K = \mathbb{F}_q$ для чётного q, это множество совпадает с множеством классов сопряжённости инволюций в $G_n(K)$.

Напомним, что последовательность $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, \ldots$ **чисел Каталана** c_k, $k \geq 0$, удовлетворяет начальному условию $c_0 = 1$ и рекуррентному соотношению $c_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} c_i c_{n-i}$ для $n \geq 0$.

Теорема 1. *a) Многобразие $\mathcal{M}_n$ имеет k_n компонент одинаковой размерности d_n.*

b) Каждая компонента содержит плотную B_n-орбиту.

c) Числа k_n и d_n даются таблицей

n	k_n	d_n
$2m$	c_m	m^2
$2m-1$	c_m	$m(m-1)$

d) Для случая конечного поля $K = \mathbb{F}_q$ число точек в множестве $\mathcal{M}_n(K)$ даётся многочленом $A_n(q)$ со старшим членом $k_n q^{d_n}$.[2]

Начнём с того, что аффинное многобразие $\mathcal{M}_n$ является дизъюнктным объединением квази-аффинных многобразий $\mathfrak{g}_\lambda$, где λ пробегает разбиения вида $1^k 2^m$, $k + 2m = n$. Это, вместе с результатами лекции 3, доказывает утверждение d).

Для доказательства b), предположим сначала, что K - конечное поле характеристики 2. Тогда $\mathcal{M}_n(K)$ совпадает с множеством $Inv(G_n(K))$ инволюций в группе $G_n(K)$. Каждая инволюция имеет вид $g = 1 + A$, где $A^2 = 0$, то-есть $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

Мы будем использовать следующий красивый факт, открытый Анной Мельниковой:[3]

Теорема 2. *Размерность B-орбиты в $\mathfrak{g}_n$, содержащей элемент $A = \Sigma_{s=1}^{m} E_{i_s, j_s}$, равна*

$$\dim(A) = m(n-m)\mathrm{cros}(P)\mathrm{cov}(P),$$

где $\mathrm{cros}(P)$ - число пересечений (crossing), а $\mathrm{cov}(P)$ - число накрытий (cover) в домике, соответствующем ладейному размещению

$$P = \{(i_1, j_1), \ldots (i_m, j_m)\} \quad \textit{на} \quad D_n.$$

Следствием этой теоремы является тот факт, что орбиты максимальной размерности связаны с такими размещениями, у которых нет ни пересечений, ни накрытий, а количество изолированных точек минимально: одна для n нечетного и ни одной для n четного.

(В самом деле, поскольку $m = \frac{n-k}{2}$, то $m(n-m) = \frac{n^2-k^2}{4}$. Так что при данном n произведение $m(n-m)$ максимально, когда k минимально.)

Структура домиков, соответствующих орбитам максимальной размерности, довольно проста и красива. Достаточно понять, что происходит, когда к уже построенному домику без изолированных точек добавляется

[2] Таблица многочленов A_n приведена в записках курса.

[3] Я знал эту формулу для многих частных случаев, но не смог угадать правильную форму общего ответа.

одна такая точка, или к домику с одной изолированная точкой добавляется ещё одна так, чтобы их можно было соединить одной крышей без пересечения с уже имеющимися. В результате мы получаем, что число таких домиков для $n = 2m$ и для $n = 2m - 1$ равно m-ому числу Каталана $c_m = \frac{(2m)!}{m!(m+1)!} = \binom{2m}{m} - \binom{2m}{m+1}$.

1.2. **Обобщение многообразий $\mathcal{M}_n(K)$.** Вот некоторые значения сумм $B_n(q) = \Sigma_{k+2m+3l=n} P_{1^k 2^m 3^l}$, вычисленные Димой Голубенко (Dmitry Golubenko <golubenko@mccme.ru> Apr 6, 2019).

$\mathrm{B}_0 = 1$ $\quad$ $B_4 = 3q^5 - 3q^4 + q^3$

$\mathrm{B}_1 = 1$ $\quad$ $B_5 = 5q^8 - 5q^7 + q^5$

$\mathrm{B}_2 = q$ $\quad$ $B_6 = 5q^12 - 9q^10 + 5q^9$

$\mathrm{B}_3 = q^3$ $\quad$ $B_7 = 21q^16 - 35q^15 + 15q^14$

$\mathrm{B}_8 = 42q^21 - 70q^20 + 14q^19 + 21q^18 - 7q^16 + q^14$

$\mathrm{B}_9 = 42q^27 - 162q^25 + 147q^24 - 27q^22 + q^18$

$\mathrm{B}_{10} = 210q^33 - 450q^32 + 225q^31 + 42q^30 - 35q^27 + 9q^25$

$\mathrm{B}_{11} = 462q^40 - 990q^39 + 330q^38 + 385q^37 - 231q^35 + 45q^33$

$\mathrm{B}_{12} = 462q^48 - 2673q^46 + 3080q^45 - 1188q^43 + 275q^42 + 55q^39 - 11q^36 + q^33$

$\mathrm{B}_{13} = 2574q^56 - 6435q^55 + 3575q^54 + 1287q^53 - 429q^51 - 1365q^50 + 429q^49 + 429q^48 - 65q^45 + q^39$

$\mathrm{B}_{14} = 6006q^65 - 15015q^64 + 6435q^63 + 7007q^62 - 5733q^60 - 1001q^59 + 2366q^58 - 77q^52 + 13q^49$

$\mathrm{B}_{15} = 6006q^75 - 45045q^73 + 60060q^72 - 33696q^70 + 11375q^69 + 1925q^66 - 715q^63 + 91q^60$

E-mail address: sasha.kirillov.1936@gmail.com