Летний городской
математический лагерь НИУ ВШЭ
16—26 августа

Теория чисел. Делимость. Решения

Разминка

1. а) 1,2,5,10,25,50;
   б) Нет;
   в) Если a и b не делятся на p, то по основной теореме арифметики $a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_n^{k_n}$, $b = p_1^{s_1} p_2^{s_2} ... p_n^{s_n}$, где $0 \leq s_i, k_i$ и p_i отлично от p. Тогда $ab = p_1^{k_1+s_1} p_2^{k_2+s_2} ... p_n^{k_n+s_n}$, p_i по прежнему отлично от p.

Основные задачи

1. Пусть данные числа – a и b. Тогда a + b = 201. Рассмотрим произведение ab. Предположим, что ab делится на 201 = 3·67. Тогда либо a, либо b кратно 3. Но если a делится на 3, то b = 201 – a также делится на 3, и наоборот. Таким образом, оба числа a и b кратны 3. Аналогично доказывается, что оба числа a и b делятся на 67. Итак, каждое из чисел a, b делится на 3·67 = 201. Но тогда каждое из них не меньше 201, и сумма не может равняться 201.
2. а) 5279;
   б) 2017 не делится ни на одно число от 1 до 10;
   в) в разложении 5500 на простые есть 11>10.
3. 17x + 19y = 23(x + y) – 2(3x + 2y).
4. Пусть есть n-значное число a, a_i - его i-тая цифра справа. Тогда $a = (a_1 + ... + a_n) + (9a_2 + 99a_3 + ... + 99...9a_n)$. Выражение в правой скобке делится на 3.
5. Так как a, b, c, d делятся на $ab - cd$, то ab и cd делятся на $(ab - cd)^2$. Значит, и $ab - cd$ делится на $(ab - cd)^2$. Отсюда легко следует утверждение задачи.
6. а) 2 ; б) 24 (Сколько чисел от 1 до 100, которые делятся на 5? А на 25?).
7. 100! +1.

8. Пусть это произведение можно представить в виде x^2. Разложим x на простые множители. В разложении должно присутствовать число два, поскольку наше произведение делится на 2, ведь это первое простое число. Но тогда произведение делится еще и на $2^2 = 4$, что противоречит тому, что все постые числа, начиная со второго, - нечетные.

9. Пусть данные числа a, b, c, d, e, f, g, а S – их сумма. По условию числа $S - a, S - b, S - c, S - d, S - e, S - f, S - g$ делятся на 5. Значит, и их сумма, $7S - S = 6S$ делится на 5. Но тогда и S делится на 5, а значит, на 5 делятся и числа $a = S - (S - a), ..., g = S - (S - g)$.

10. а) Среди этих чисел есть число, кратное 3, есть число, кратное 5, и есть чётное число. Значит, произведение делится на произведение простых чисел 2, 3, 5, то есть на 30;
б) Среди пяти подряд идущих чисел есть два чётных, одно из которых делится на 4. Поэтому в разложении произведения на простые множители число 2 встретится трижды. Значит, произведение делится на 3, 5 и 8, то есть и на их произведение 120.

11. $n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^2 - 1)(n^2 - 4) = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$. Из пяти последовательных чисел одно делится на 5, по крайней мере одно – на 3, и два числа являются соседними чётными числами, одно из которых делится на 2, а другое на 4. Окончательно данное выражение делится на $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 120$;
б) $n^5 + 4n = (n^5 - 5n^3 + 4n) + 5n^5$.

12. 2019! + 2, 2019! +3, ..., 2019! + 2019.

13. а) Представляем это число в виде $p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_n^{k_n}$. Делители этого числа имеют вид $p_1^{s_1} p_2^{s_2} ... p_n^{s_n}$, где $0 \leq s_i \leq k_i$. Из комбинаторных соображений количество делителей равно $(k_1 + 1)(k_2 + 1)...(k_n + 1)$.
б) $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5$.

14. 2. а) Можем использовать цифры 1,4,7, - они вносят единицу в остаток от деления суммы цифр на 3, и цифры 2,5,8, - они вносят двойку. Чтобы сумма цифр не получилась кратной трем, с точностью до перестановок слагаемых существует четыре способа получить сумму цифр не кратной трем: 1+1+1+1, 1+1+1+2, 1+2+2+2 и 2+2+2+2 (здесь мы рассматриваем остатки). Итого:$3^4 + 2 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^4 + 3^4 = 5 \cdot 3^4$ способа.
б) Так как 1+8=4+5=7+2, то для любого числа, которое находится в обоих блокнотах, существует парное такое, что сумма этих двух чисел равна 9999. У числа 9999 сумма цифр 36, значит, общая сумма цифр всех чисел, находящихся в блокнотах Саши и Маши, - $18 \cdot 5 \cdot 3^4$.

Летний городской математический лагерь НИУ ВШЭ 16—26 августа

2D

1) Разбейте какой-нибудь клетчатый квадрат на клетчатые квадратики так, чтобы не все квадратики были одинаковы, но квадратиков каждого размера было одно и то же количество.
   Решение. Вот один из многих способов сделать это: разрежем квадрат размером 1010 клеточек на 25 равных квадратов 22, а потом выберем из полученных квадратов любые пять и разрежем каждый из них на 4 клеточки. Получится 20 квадратов со стороной 2 и 20 квадратов со стороной 1.

2) Нарисуйте на плоскости пять различных прямых так, чтобы они пересекались ровно в семи различных точках.
   Важно объяснить детям, что каждый раз, добавляя новую прямую, мы сами регулируем количество добавляемых точек пересечения. Например, рисуя три прямые, количество точек пересечения может варьироваться от 0 до 3.

3) В доску вбито 20 гвоздиков (см. рисунок). Расстояние между любыми соседними равно 1 дюйму. Натяните нитку длиной 19 дюймов от первого гвоздика до второго так, чтобы она прошла через все гвоздики.
   наглядно показать теорему Пифагора в следующей формулировке: диагональ прямоугольника длиннее

```
               . . . .
            1. . . . . .2
               . . . .
               . . . .
любой его стороны.  . .
```

4) Можно ли в прямоугольник 5×6 поместить прямоугольник 3×8?
   Решение. Нельзя, так как диагональ прямоугольника 5*6 меньше диагонали прямоугольника 3*8. Здесь тоже полезно а) понять, какая часть в прямоугольнике самая "широкая", б) попробовать ввести теорему уже в нормальной формулировке (считать диагональ, зная стороны)

5) В полдень Вася положил на стол 10 вырезанных из бумаги выпуклых десятиугольников. Затем он время от времени брал ножницы, разрезал по прямой один из лежащих на столе многоугольников на два и клал оба получившихся куска назад на стол. К полуночи Вася проделал такую операцию 51 раз. Докажите, что в полночь среди лежащих на столе многоугольников был треугольник или четырёхугольник.

   Подсказка.

   а) Сколько всего углов у лежащий на столе фигур?

   б) Если Вася разрежет одну из них, сколько новых углов прибавится?

   Решение. Так как после каждого разрезания число многоугольников увеличивалось на 1, в полночь на столе лежал 61 многоугольник. Допустим, у каждого из этих многоугольников было не меньше пяти вершин. Тогда всего вершин у многоугольников на столе в полночь было по крайней мере $5*61 = 305$. Но при каждом разрезании суммарное число вершин увеличивалось на 2 (если разрез проходил через две вершины), 3 (если разрез проходил через одну вершину и одну точку внутри стороны) или 4 (если разрез проходил через две точки внутри сторон). Поэтому общее число вершин за 51 разрезание могло увеличиться не больше, чем на $514 = 204$, и потому суммарное число вершин в полночь не превосходило $100+204 = 304$. Противоречие.

6) Могут ли расстояния от точки плоскости до вершин некоторого квадрата быть равными 1, 1, 2 и 3?
   Ответ: Нет. Решение. По условию точка O равноудалена от двух вершин некоторого квадрата $ABCD$.

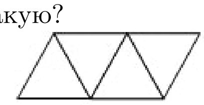
Возможны два случая. 1)Пусть точка O равноудалена от двух соседних вершин квадрата (пусть это вершины A и B). Тогда она лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB. Но он же является серединным перпендикуляром и к стороне CD, то есть точка O должна быть равноудалена также и от точек C и D, что, очевидно, невозможно. 2)Пусть точка O равноудалена от двух противоположных вершин квадрата (пусть это вершины A и C). Тогда она лежит на серединном перпендикуляре к AC, то есть на прямой BD. Снова рассмотрим два возможных случая. 2а)Точка O лежит на диагонали BD. Тогда $AB = BD = OB + OD = 5 > 2 = OA + OB$, что невозможно. 2б)Точка O лежит на продолжении диагонали BD (пусть, для определённости, за точку D). Тогда в треугольнике ADO против тупого угла D лежит сторона $OA = 1 \geq OD$, что также невозможно.

Летний городской математический лагерь НИУ ВШЭ 16—26 августа

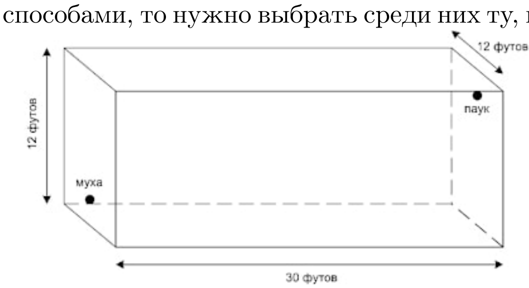
2.5D

1) Попробуйте найти все возможные развёртки куба (всего их существует 11 штук). etudes.ru/ru/etudes/cubic-parquet/

2) У Буратино была бумага, с одной стороны оклеенная полиэтиленом. Он сделал заготовку, изображенную на рисунке, чтобы склеить из нее пакет для молока. Лиса Алиса сказала, что может сделать другую заготовку и склеить такой же пакет. Какую?



3) Комната имеет форму прямоугольного параллелепипеда, размеры которого указаны на рисунке. Посредине боковой стены на расстоянии одного фута от потолка сидит паук. Посредине противоположной стены на высоте одного фута от пола сидит муха. От страха у нее отнялись ноги, и она не может двинуться с места. Спрашивается, каково кратчайшее расстояние, которое должен преодолеть паук для того, чтобы схватить муху?
Решение. Для решения задачи нужно построить развертку граней прямоугольного параллелепипеда и провести на ней прямую от местонахождения паука к точке, в которой сидит муха. Поскольку построить развертку можно многими способами, то нужно выбрать среди них ту, которая дает кратчайшее расстояние.



4) Петя склеил бумажный кубик и записал на его гранях числа от 1 до 6 так, чтобы суммы чисел на любых двух противоположных гранях были одинаковыми. Вася хочет разрезать этот кубик так, чтобы получить стандуртную крестовую развёртку. При этом Вася старается, чтобы суммы чисел по горизонтали и по вертикали в этой развёртке отличались как можно меньше. Какая самая маленькая положительная разность может у него получиться, независимо от того, каким образом расставлял числа Петя?
Решение. **Первый способ.** Заметим, что в указанной развёртке противоположными гранями являются крайние по горизонтали, а также первая и третья сверху по вертикали. Поэтому, независимо от расположения чисел на развёртке, разностью между суммами по вертикали и по горизонтали является число, записанное в нижнем квадрате. Следовательно, Васе надо разрезать кубик так, чтобы в этом квадрате была записана цифра 1. В этом случае на пересечении полос будет цифра 6, одна из пар (2, 5) и (3, 4) окажется на горизонтали, а другая – на вертикали. **Второй способ.** Из условия следует, что сумма чисел на противоположных гранях кубика равна $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) : 3 = 7$. На вертикальной полоске расположены две пары чисел, которые записаны на противоположных гранях кубика, поэтому сумма чисел на этой полоске равна 14. Сумма чисел на крайних квадратах горизонтальной полоски равна 7, значит для того, чтобы сумма чисел на этой полоске как можно меньше отличалась от 14, Васе нужно разрезать кубик так, чтобы в пересечении полосок была цифра 6. В этом случае в нижнем квадрате будет расположена цифра 1.

Летний городской
математический лагерь НИУ ВШЭ
16—26 августа

3D

1) Какие тени может отбрасывать куб? А тетраэдр?
Решение: полезно понимать следующие вещи: а) что мы видим, если смотрим на куб издалека (как будто мы находимся на месте солнышка); б) почему пункт а) и тень куба – одно и то же; в) сколько граней куба мы можем видеть одновременно; г) сколько углов будет получаться у плоской фигуры из пункта а) в зависимости от количества видимых граней?; ... аналогично для тетраэдра.

2) Какие фигуры могут получаться в сечении куба плоскостью? Перечислите все варианты.
Решение: во-первых, обязательно не забывать про точку и отрезок. во-вторых, можно жить по-нарастающей: точка, отрезок, треугольник, четырёхугольник... в-третьих, задача довольно классическая.

3) Придумайте, как может выглядеть универсальная пробка, которой можно закрыть и круглое, и квадратное, и треугольное отверстия одинаковой высоты.
Решение: Задача эквивалентна следующей: придумайте тело, у которого проекции в трёх разных направлениях: квадрат, треугольник и круг с одинаковой высотой.

4) а) Тело отбрасывает квадратную тень. Обязательно ли это тело – куб?
   б) Если тенями тела в двух перпендикулярных направлениях являются квадраты с параллельными сторонами?
   в) А если тенями тела в трёх перпендикулярных направлениях являются квадраты с параллельными сторонами?

   etudes.ru/ru/etudes/shadows/

На сайте Математические этюды (etudes.ru) вы найдёте красивые мультики с решением этих и многих других задач.

Летний городской математический лагерь НИУ ВШЭ 16—26 августа

Логические задачи

Занятие 1

Для преподавателя. Первая цель данного занятия – сформулировать основные понятия математической логики. Ещё до того, как приступить к решению задач, на простых примерах напомните учащимся, что такое высказывание (утверждение), какими они бывают, как правильно строить отрицания. Важным инструментом для решения задач является закон исключённого третьего: верно либо утверждение, либо его отрицание, третьего не дано.

Вторая (бо́льшая) часть занятия посвящена решению логических задач методом перебора. Основная идея заключается в необходимости не только найти ответ, но и доказать его единственность. Для успешного решения задач важно также организовывать перебор наиболее эффективным образом.

1. Учёные планеты Сигма установили, что все лямбдоиды имеют дельтовый цвет.

   а) В лабораторию пришёл образец дельтового цвета. Верно ли, что это лямбдоид?

   б) В лабораторию пришёл образец эпсилонового цвета. Верно ли, что это не лямбдоид?

   Для преподавателя. С помощью этой простой задачи можно разобрать простейшие понятия: общие утверждения и утверждения о существовании, отрицания, закон исключённого третьего.

   Решение. а) неверно; б) верно.

2. На острове рыцарей и лжецов живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Островитяне знают, кто из них рыцарь, а кто лжец, а вот приезжие не могут их различить. Однажды путешественник встретил двух туземцев и спросил, кто они.

   – Мы оба рыцари! – сказал первый туземец.

   – Это ложь! – возразил второй.

   Кем были туземцы на самом деле?

   Для преподавателя. Обратите внимание на правильное построение отрицания к утверждению первого туземца.

   Решение. Туземцы противоречат друг другу, высказывая противоположные утверждения. Согласно закону исключённого третьего, один из них рыцарь, а другой – лжец. Но тогда первый туземец лжёт. Значит, именно он является лжецом, а его напарник – рыцарем. Заметим, что задача может быть также решена перебором всех возможных вариантов. Однако этот способ будет подробно рассмотрен в задаче 4.

3. В другой раз путешественник встретил на острове трёх местных жителей и решил выяснить, кто они.

   – Мы все рыцари! – сообщил первый туземец.

– Мы все лжецы! – заявил второй.

Что сказал третий туземец?

Для преподавателя. Эту задачу детям стоит решить самостоятельно.

Решение. Если бы все туземцы были рыцарями, они бы дали одинаковые ответы, но это не так. Значит, первый туземец лжёт. Второй туземец не может быть рыцарем, поскольку в этом случае его утверждение было бы ложным. Таким образом, он тоже лжец. Если и третий туземец был бы лжецом, то второй сказал бы правду, но это невозможно, т.к. он лжец. Поэтому третий туземец должен быть рыцарем и сказать правду о себе и своих спутниках.

4. До князя дошла весть, что один из трёх богатырей убил Змея Горыныча. Призвал он их к себе в терем. Молвили богатыри:

   Илья Муромец: «Змея убил Добрыня Никитич».

   Добрыня Никитич: «Змея убил Алёша Попович».

   Алёша Попович: «Я убил Змея».

   Известно, что один богатырь сказал правду, а остальные слукавили. Кто же убил Змея Горыныча?

   Для преподавателя. Детям может показаться, что достаточно найти одно непротиворечивое решение. Укажите им на необходимость полного перебора, то есть доказательства единственности решения.

   Решение. Если Змея убил Илья, то ни один богатырь не сказал правду, а если его одолел Алёша, то слукавил только Илья. Если же Змея одолел Добрыня, то Илья сказал правду, а остальные богатыри слукавили, что и требуется по условию.

   Перебор можно построить иначе. Известно, что правду сказал только один богатырь. Если это Илья Муромец, то Змея убил Добрыня, а остальные богатыри слукавили. Если же правду сказал Добрыня, то Алёша также говорит правду, и наоборот, что противоречит условию задачи.

5. На уроке Оля обнаружила на своей парте валентинку с текстом: «Лучшей девочке в классе». Она посмотрела на трёх сидящих рядом ребят: Ваню, Серёжу и Алёшу. Все трое покраснели.

   – Кто из вас делает мне такие комплименты? – спросила Оля.

   – Это Серёжа! – сказал Ваня.

   – Нет, это не я! – возразил Серёжа.

   – Я тоже ничего такого не делал! – заявил Алёша.

   Подруга Оли Маша всё видела. «Двое из них лгут!» – подсказала она. Однако больше Маша ничего решила не говорить. Кто же является тайным поклонником Оли?

   Для преподавателя. Задача аналогична предыдущей и хорошо подходит для задания на дом.

   Решение. Задача, конечно, может быть решена перебором, но есть и более изящный путь. Ваня и Серёжа высказывают противоположные утверждения: один из них говорит правду, а другой лжёт. Стало быть, Алёша тоже лжёт (по условию лгут двое), а значит, на самом деле именно он отправил валентинку.

6. Из каюты капитана пиратского корабля пропала бутылка рома. Подозрение пало на трёх пиратов: Гарри, Тома и Одноглазого Чарли. Подозреваемые заявили:

   Гарри: «Не трогал я вашего рома, капитан. Кстати, Том тоже ни при чём».

   Том: «Ручаюсь головой, Гарри невиновен! Ром стащил Одноглазый».

   Чарли: «Бутылку взял Гарри. А я в этом не замешан».

Капитану удалось выяснить, кто же взял ром. Выяснилось, что воришка действовал в одиночку. При этом один из подозреваемых дважды солгал, другой оба раза сказал правду, а третий один раз сказал правду и один раз солгал. Кто же взял ром?

Для преподавателя. Детям стоит порешать эту задачу самостоятельно. Ключ к быстрому решению – в правильном переборе: перебирать нужно не истинность и ложность утверждений, а подозреваемых.

Решение. Если ром украл Гарри, то он один раз солгал и один раз сказал правду, Том оба раза солгал, а Чарли дважды сказал правду. Другие варианты не подходят: если вором был Том, то все по разу сказали правду и ложь, а если ром стащил Одноглазый Чарли, то Том и Гарри высказали по два истинных утверждения.

7. Три путешественника увидели вдали остров.

   – На острове больше ста пальм! – воскликнул первый из них.

   – Нет, на острове меньше ста пальм, – возразил второй.

   – Ну хоть одна пальма на острове уж точно есть, – сказал третий.

   Когда путешественники высадились на остров и обследовали его, оказалось, что прав был лишь один из них. Сколько же пальм на острове?

   Для преподавателя. Здесь есть где споткнуться неопытному ученику, поэтому будьте готовы к многочисленным ошибкам. Они могут быть связаны, во-первых, с неправильным построением отрицания к высказываниям со словами «больше» и «меньше», а во-вторых, с нахождением только одного решения из двух. В конце занятия необходимо разобрать задачу у доски (это может сделать кто-то из учеников).

   Решение. Если первый путешественник сказал правду, то третий тоже прав – противоречие. Если правду сказал второй, то третий должен был солгать, таким образом, на острове нет ни одной пальмы. Если же прав был третий, то единственный вариант, при котором остальные двое ошиблись – когда на острове ровно сто пальм. Итак, задача имеет два верных решения: сто пальм или ни одной.

8. Перед футбольным матчем команд «Север» и «Юг» было дано пять прогнозов:

   - ничьей не будет;
   - в ворота «Юга» забьют;
   - «Север» выиграет;
   - «Север» не проиграет;
   - в матче будет забито ровно 3 гола.

   После матча выяснилось, что ровно три прогноза из пяти оказались верными. С каким счётом он закончился?

   Для преподавателя. Эту задачу также можно задать на дом. Впрочем, если вы работаете с сильной группой, то до неё может дойти очередь и на уроке.

   Решение. Пусть «Север» выиграл. Тогда все прогнозы, кроме последнего, сбылись, что противоречит условию. Предположим теперь, что была ничья. В этом случае первый, третий и пятый прогноз ложны, что также противоречит условию. Таким образом, «Север» потерпел поражение. Это делает неверными третий и четвёртый прогнозы, то есть все остальные должны сбыться. Первый, очевидно, в этом случае верен. Пятый сбывается при счёте 3:0 или 2:1 в пользу «Юга», а из этих вариантов второй прогноз соответствует действительности лишь при счёте 2:1.

9. Три мальчика после рыбалки сказали:

   Петя: «Я поймал 22 рыбы. Гриша поймал на две рыбы больше меня. Вася – на одну меньше меня.»

Гриша: «Я поймал не меньше всех. Вася поймал 25 рыб. Разница между моим уловом и уловом Васи составляет три рыбы.»

Вася: «Я поймал меньше, чем Петя. Петя поймал 23 рыбы. А Гриша – на три рыбы больше, чем Петя.»

Оказалось, что каждый из мальчиков дважды сказал правду и один раз ошибся. Кто сколько рыбы поймал?

Для преподавателя. Трудоёмкая задача повышенной сложности для самых сильных учеников. К ней могут обратиться те, кто уже справился с задачей 7.

Решение. Внимательный читатель заметит, что первые два утверждения Пети противоречат соответственно второму и третьему утверждению Васи. Поскольку никто из ребят не ошибся дважды, один из них верно указал улов Пети, а другой – разницу между уловами Пети и Гриши.

Если Петя поймал 22 рыбы, а Гриша – на три больше (то есть 25 рыб), то Вася, в соответствии с ещё одним истинным утверждением Пети, поймал 21 рыбу. Таким образом, второе и третье утверждение Гриши оказываются ложными – противоречие.

Если же Петя поймал 23 рыбы, а Гриша – на две больше (опять же 25 рыб), то улов Васи составляет 22 рыбы, и у каждого из рыбаков действительно ровно одно ложное утверждение из трёх: у Пети – первое, у Гриши – второе, у Васи – третье.

Логические задачи

Занятие 2

1. Беседуют трое: Белов, Чернов и Рыжов. Брюнет сказал Белову: «Любопытно, что один из нас блондин, другой — брюнет, а третий — рыжий, но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии». Какой цвет волос у каждого из них?

   Для преподавателя. Классическая задача, которую удобно решить составлением двудольного графа или таблицы.

   Решение. Брюнет и Белов – это разные люди. Также Белов не может быть блондином. Значит, у него рыжие волосы. Чернов – блондин, а Рыжов – брюнет.

2. Капитан Врунгель заявил, что побывал на острове Муостах в Индийском океане, на острове Ихавандиффулу в Тихом океане и на острове Арораэ в Северном Ледовитом океане. Эти острова существуют на самом деле и действительно находятся в трёх названных океанах, но капитан Врунгель ни один остров не «разместил» в нужном океане. Определите, какой остров в каком океане находится, если известно, что остров в Тихом океане принадлежит республике Кирибати, а остров Муостах — России.

   Для преподавателя. Абсолютно аналогичная задача. Если решение первой было разобрано с помощью таблицы, предложите решить эту при помощи графа, и наоборот. Но полезно будет также решить данную задачу, обратившись к уже составленной ранее таблице (графу).

   Решение. Из условия можно понять, что остров в Тихом океане и Муостах – это разные острова. Таким образом, Муостах может находиться только в Северном Ледовитом океане. Тогда Ихавандиффулу расположен в Индийском океане, а Арораэ – в Тихом.

3. Три гнома, Пили, Ели и Спали, нашли в пещере алмаз, топаз и медный таз. У Ели капюшон красный, а борода длиннее, чем у Пили. У того, кто нашел таз, самая длинная борода, а капюшон синий. Гном с самой короткой бородой нашел алмаз. Кто что нашел, если каждый гном нашел один предмет?

   Для преподавателя. Оставьте эту задачу на дом.

   Решение. У Ели красный капюшон, поэтому он не мог найти таз. Не мог он найти и алмаз, поскольку его борода точно не самая короткая. Значит, ему достался топаз. У Пили не может быть самой длинной бороды, значит, он нашёл алмаз, а Спали – медный таз.

4. Три подруги пришли на праздник в красном, белом и голубом платьях. Их туфли были тех же трёх цветов. Только у Тамары цвета платья и туфель совпадали. Валя была в белых туфлях. Ни платье, ни туфли Лиды не были красными. Определите цвет платья и туфель каждой из подруг.

   Для преподавателя. Эта задача посложнее предыдущих. Пусть дети решат её самостоятельно.

Решение. Лида была в голубых туфлях, ведь красных у неё не могло быть по условию, а в белых пришла Валя. Отсюда следует, что её платье было белым. Значит, Тамара пришла во всём красном, а Вале осталось голубое платье.

5. Четыре подруги пришли на каток, каждая со своим братом. Они разбились на пары и начали кататься. Оказалось, что в каждой паре кавалер выше дамы, при этом никто не катался с собственной сестрой. Самым высоким в компании был Юра Воробьёв, следующим по росту – Андрей Егоров, потом – Люся Егорова, Серёжа Петров, Оля Петрова, Дима Крылов, Инна Крылова и Аня Воробьёва. Определите, кто с кем катался.

   Для преподавателя. Задача решается построением двудольного графа, но намного проще решить её, вначале упорядочив все элементы обеих множеств.

   Решение. Люся Егорова могла кататься только с Юрой Воробьёвым. Тогда Оле Петровой остаётся только Андрей Егоров, Инне Крыловой – только Серёжа Петров, а Ане Воробьёвой – Дима Крылов.

6. В очереди в школьный буфет стоят Алла, Боря, Вика, Галя и Денис. Вика стоит впереди Гали, но после Аллы, Боря и Алла не стоят рядом, Денис не находится рядом ни с Аллой, ни с Борей, ни с Викой. В каком порядке стоят ребята?

   Для преподавателя. Задача для самостоятельного решения.

   Решение. У Дениса может быть только один сосед в очереди (Галя), поэтому он точно стоит первым или последним. Если он первый, то Галя вторая, но тогда Вика оказывается позади неё. Значит, Денис замыкает очередь, а перед ним стоит Галя. Чтобы Боря и Алла не оказались рядом, между ними должна стоять Вика. Алла должна быть впереди неё, поэтому именно она стоит первой, Вика – второй, а Боря – третьим.

7. Петя, Гена, Дима и Вова занимаются в спортивных секциях: гимнастической, баскетбольной, волейбольной и легкоатлетической. Волейболист учится с Петей и Димой в одном классе. Петя и Гена на тренировки ходят пешком вместе, а гимнаст ездит на автобусе. Легкоатлет не знаком ни с баскетболистом, ни с волейболистом. Кто в какой секции занимается?

   Для преподавателя. Задача повышенной сложности на составление таблицы или двудольного графа.

   Решение. Из условия очевидно, что Петя и Дима не занимаются волейболом, а также что Петя и Гена – не гимнасты. Из последнего условия мы узнаём, что у легкоатлета не больше одного знакомого, значит, это точно не Петя и не Дима (поскольку они учатся в одном классе втроём с волейболистом). Получается, что Петя может заниматься только баскетболом. Тогда Дима – гимнаст. Теперь снова обратимся к последнему условию: легкоатлет не знаком с баскетболистом Петей, а Гена с Петей знаком (ходит вместе на тренировки). Таким образом, легкой атлетикой занимается Вова, а волейболом – Гена.

8. В международном студенческом лагере в одной комнате жили четыре студента: физик, биолог, историк и математик. Каждый из них владеет двумя языками из четырёх: английский, французский, итальянский и русский. Ни один из студентов не владеет французским и итальянским одновременно. Хотя физик не может говорить по-английски, он был переводчиком в разговоре биолога и историка. Историк знает итальянский, а математик — нет, поэтому они общались по-русски. Физик, биолог и математик не могут беседовать втроём на одном языке. Как общался с каждым из соседей математик?

   Для преподавателя. Ещё одна задача повышенной сложности. Проще всего составить таблицу, в которой у каждого из студентов должно стоять два «плюса».

   Решение. Из условия непосредственно следует, что историк владеет итальянским и русским языками. Биологу и историку понадобился переводчик – значит, ни один из их языков не совпадает, то есть биолог говорит по-английски и по-французски. Физик не знает английского, но был переводчиком для биолога – очевидно, французский язык ему знаком, значит, его второй язык – русский (поскольку одновременно французским и итальянским никто не владеет). Математик знает русский и не знает итальянского. Если бы он владел французским, то мог бы поговорить на нём втроём с физиком и биологом, поэтому его второй язык – английский.

Летний городской
математический лагерь НИУ ВШЭ
16—26 августа

Логические задачи

Занятие 3

Для преподавателя. На заключительном занятии будут рассмотрены сложные и нетривиальные логические задачи. Первая часть занятия посвящена традиционным задачам о рыцарях и лжецах с большим количеством действующих лиц. В конце занятия рассматриваются так называемые «метаголоволомки» – задачи с неполной информацией.

1. В городке на острове рыцарей и лжецов было 100 жителей. Однажды все они вышли на площадь, и каждый посмотрел на остальных и сказал: «Вы все лжецы!» Сколько в городке рыцарей и сколько лжецов?

   Для преподавателя. Не слишком сложная задача, которую можно, как ни странно, решить с помощью перебора вариантов. Задача также позволяет вспомнить, как строятся отрицания к общим утверждениям.

   Решение. Если бы все жители были лжецами, то получилось бы, что каждый из них говорит правду. Значит, один рыцарь в городе точно есть. Но этот рыцарь должен говорить правду, поэтому все, кроме него, действительно лжецы. Таким образом, в городке 1 рыцарь и 99 лжецов.

2. За круглым столом сидят островитяне, каждый из которых – рыцарь или лжец. Каждый из них говорит: «С одной стороны от меня сидит рыцарь, а с другой – лжец». Сколько за столом рыцарей и сколько лжецов, если всего за ним сидит:

   а) 12 человек;

   б) 99 человек;

   в) 100 человек?

   Для преподавателя. И эта задача решается перебором, который должен в 2 случаях из 3 привести к нахождению двух ответов. Также затрагивается понятие делимости.

Решение. Пусть за столом есть один рыцарь. Тогда по одну руку от него действительно сидит рыцарь, а по другую – лжец. С другой стороны от лжеца также сидит рыцарь (иначе он бы сказал правду), за ним ещё один рыцарь, далее – лжец, и так далее. Получается повторяющаяся последовательность: Л–Р–Р–Р–Р–Л–Р–Р... Очевидно, что каждый третий из сидящих за столом будет лжецом. В первом случае имеется 8 рыцарей и 4 лжеца, во втором – 66 рыцарей и 33 лжеца. Но в случае 100 человек такой ответ невозможен, ведь 100 не кратно 3. Однако необходимо рассмотреть ещё и второй случай: все сидящие за столом – лжецы. Этот вариант ответа не противоречит условию при любом количестве сидящих за столом.

3. На острове жило 999 человек, каждый из которых был рыцарем или лжецом. Однажды все жители решили покинуть остров. Каждый вечер один из жителей уплывал с острова на лодке, перед отплытием заявляя: «Когда я уеду, на острове останется поровну рыцарей и лжецов». Никто не возвращался на остров, и новых жителей там тоже не появлялось, поэтому через 999 дней остров опустел. Сколько рыцарей и сколько лжецов на нём было изначально?

   Для преподавателя. В задаче используется классический приём – решение «с конца». Её можно оставить на дом в качестве задачи повышенной сложности.

   Решение. Последний уехавший с острова сказал правду, ведь после его отплытия на острове осталось 0 лжецов и 0 рыцарей. Значит, он был рыцарем. Перед ним остров покинул лжец, который соврал. До него – снова рыцарь, и так далее. Таким образом, изначально на острове было 500 рыцарей и 499 лжецов.

4. Когда Черный Король спит, то обо всем судит превратно. Иначе говоря, все, что Черный Король считает во сне истинным, на самом деле ложно, и наоборот. С другой стороны, наяву Черный Король обо всем судит здраво, то есть считает истинное истинным, а ложное ложным. Вчера вечером ровно в десять часов Черный Король считал, что они с Черной Королевой уже почивали в это время. Спала или бодрствовала Черная Королева вчера в десять часов вечера?

   Для преподавателя. Разумеется, это не что иное, как одна из «вариаций на тему» рыцарей и лжецов. И методы решения здесь аналогичные. Обратите внимание на то, чтобы отрицание к утверждению «Король и Королева спят» было построено детьми корректно.

   Решение. Бодрствующий Король, очевидно, не может считать себя спящим. Значит, Король действительно спал. Но тогда его утверждение должно быть ложным, а значит, Королева на самом деле бодрствовала.

5. Черная Королева, как и Черный Король, во сне обо всем судит превратно, а наяву – здраво. Позавчера вечером незадолго до полуночи Черный Король

думал, что Черная Королева спит. Она же в это самое время либо думала, что он спит, либо думала, что он бодрствует. Что она думала?

Для преподавателя. Эта задача подходит для самостоятельного решения детьми.

Решение. Пусть Король бодрствовал, тогда Королева действительно спала, а значит, заблуждалась насчёт Короля и думала, что он спит. Если же Король спал, то Королева на самом деле бодрствовала и понимала, что он спит.

6. Как-то раз шло судебное расследование по делу двух братьев-близнецов. Было известно, что по крайней мере один из них никогда не говорил правду, хотя и не ясно, кто же именно. Одного из братьев звали Джон — именно он и совершил преступление. (При этом вовсе не обязательно, чтобы Джон был тем из близнецов, который всегда лгал.) Цель расследования заключалась в том, чтобы выяснить, кого же из братьев зовут Джон. «Вы — Джон?» — спросил судья одного из близнецов. «Да, я Джон», — последовал ответ. «А вы — Джон?» — спросил судья второго брата. Второй близнец ему ответил вполне определенно (либо «да», либо «нет»), и тут судья сразу догадался, кто из них Джон. Был Джон первым или вторым из близнецов?

   Для преподавателя. Это одна из простейших задач с неполной информацией, которая подходит для знакомства с метаголоволомками.

   Решение. Если бы второй брат также ответил бы «да», то судья не мог бы различить их, ведь они бы одинаково ответили на один и тот же вопрос. Значит, он ответил отрицательно. Таким образом, оба брата утверждают, что Джоном является первый из них. По меньшей мере один из них лжёт – значит, лгут оба брата, и Джоном на самом деле был второй. При этом неизвестно, кто из братьев лжёт всё время, а кто – от случая к случаю.

7. В ещё одном расследовании по делу двух других близнецов было известно, что один из них – Билл – преступник, а другой всегда говорит правду. Судья спросил у одного из них: «Ваш брат – Билл?» Услышав какой-то определённый ответ (либо «да», либо «нет»), он понял, кто из них Билл. Кто же?

   Для преподавателя. Задача для самостоятельного решения.

   Решение. Предположим, подозреваемый ответил утвердительно. Это возможно в двух случаях: либо это был всегда говорящий правду брат Билла, либо сам Билл, который солгал. Значит, судья не смог бы вычислить Билла по этому ответу. Выходит, был дан ответ «нет», который мог дать только Билл (ведь его брат бы солгал, дав такой ответ, что противоречит условию).

8. На острове рыцарей и лжецов путешественник встретил двух туземцев и спросил одного из них: «Вы оба рыцари?» Тот ответил «да» или «нет», но путе-

шественник после этого не смог понять, кто перед ним. Он спросил у того же человека: «Вы из одного племени?» Тот снова ответил «да» или «нет», и на этот раз путешественник понял, из какого племени каждый из островитян. Кого же он встретил?

Для преподавателя. Задача повышенной сложности, в которой сразу две неопределённости. При наличии достаточного количества времени эта задача может быть дана для решения в классе с последующим разбором, а предыдущая использована в качестве домашнего задания.

Решение. Предположим, в первый раз туземец ответил «нет». Это возможно только в одном случае: он рыцарь, а его спутник – лжец. В данном случае путешественнику не понадобился бы дополнительный вопрос. Но он ему всё же потребовался – значит, на первый вопрос туземец ответил утвердительно. Это возможно, если оба туземца действительно рыцари, а также если первый туземец – лжец (вне зависимости от племени второго туземца).

Пусть во второй раз туземец ответил «да». Туземец поступил бы так в любом случае, если его спутник был рыцарем: если он сам рыцарь, то он скажет правду, а если лжец, то соврёт. Таким образом, при данном ответе путешественник не смог бы сказать ничего определённого про одного из туземцев. Но он определил, из какого племени каждый из островитян – значит, туземец дал на второй вопрос отрицательный ответ. Такое возможно только в одном из случаев – если оба островитянина являются лжецами (вариант, что первый туземец из племени рыцарей, а второй – лжец, путешественник, разумеется, отбросил после первого вопроса).

О сдаче задач

Если вы решили задачу, которая ещё не была разобрана на занятии, вы можете сдать её любому из преподавателей курса «Логика» (Александру Тобенгаузу или Артёму Рыбалко) в перерыве между занятиями или непосредственно после окончания занятий (ориентировочно до 13:30).

Искать преподавателей имеет смысл в следующих помещениях:

- каб. 209;
- каб. 207;
- каб. 318;
- каб. 201.

Задачи принимаются до 24 августа включительно.

Летний городской математический лагерь НИУ ВШЭ 16—26 августа

Разное

1. Дорога от дома до школы занимает у Пети 20 минут. Однажды по дороге в школу он вспомнил, что забыл дома ручку. Если теперь он продолжит свой путь с той же скоростью, то придёт в школу за 3 минуты до звонка, а если вернётся домой за ручкой, то, идя с той же скоростью, опоздает к началу урока на 7 минут. Какую часть пути он прошёл до того, как вспомнил о ручке?

   Решение Если Петя вернётся домой за ручкой, то на весь путь он потратит на $3 + 7 = 10$ минут больше, чем потратил бы, если бы не возвращался. Это значит, что путь от того места, где он вспомнил про ручку, до дома и обратно занимает 10 минут. Следовательно, Петя вспомнил про ручку в 5 минутах ходьбы от дома, то есть он прошёл четверть пути.

   Ответ $1/4$

2. Двое одновременно отправились из A в B. Первый поехал на велосипеде, второй – на автомобиле со скоростью, в пять раз большей скорости первого. На полпути с автомобилем произошла авария, и оставшуюся часть пути автомобилист прошел пешком со скоростью, в два раза меньшей скорости велосипедиста. Кто из них раньше прибыл в B?

   Решение Велосипедист, двигается в два раза быстрее пешехода, поэтому может проехать весь путь за время, которое потребуется пешеходу на половину пути. Но в момент, когда пешеход стартовал, велосипедист уже проехал некоторое расстояние, Поэтому велосипедист приехал раньше

   Ответ Велосипедист

3. Группа туристов должна была прибыть на вокзал в 5 ч. К этому времени с турбазы за ними должен был прийти автобус. Однако, прибыв на вокзал в 3 ч 10 минут, туристы пошли пешком на турбазу. Встретив на дороге автобус, они сели в него и прибыли на турбазу на 20 минут раньше предусмотренного времени. С какой скоростью шли туристы до встречи с автобусом, если скорость автобуса 60 км/ч?

Решение 6 км/ч. Туристы сэкономили 20 минут, за это время автобус дважды проехал бы путь, который они прошли, а шли они 100 минут.

Ответ 6 км/ч

4. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. Одновременно из пункта B в пункт A на встречу велосипедисту вышел пешеход. После их встречи велосипедист повернул обратно, а пешеход продолжил свой путь. Известно, что велосипедист вернулся в пункт A на 30 минут раньше пешехода, при этом его скорость была в 5 раз больше скорости пешехода. Сколько времени затратил пешеход на путь из A в B?

   Решение Пусть до встречи пешеход прошел расстояние в x метров. Тогда велосипедист до встречи проехал 5x метров. К моменту возвращения велосипедиста в пункт A пешеход прошел 2x метров и ему осталось еще пройти $5x - x = 4x$ метров, на которые он потратил 30 минут. Следовательно, на каждые 2x метров он тратил 15 минут, а все расстояние между пунктами A и B $x + 5x = 6x$ пешеход преодолел за 45 минут.

   Ответ 45 минут

5. Два охотника отправились одновременно навстречу друг другу из двух деревень, расстояние между которыми 18 км. Первый шел со скоростью 5 км/ч, а второй – 4 км/ч. Первый охотник взял с собой собаку, которая бежала со скоростью 8 км/ч. Собака сразу же побежала навстречу второму охотнику, встретила его, тявкнула, повернула и с той же скоростью побежала навстречу хозяину, и так далее. Так она бегала до тех пор, пока охотники не встретились. Сколько километров она пробежала?

   Решение До встречи охотников пройдёт два часа, за это время собака пробежала 16 км.

   Ответ 16 км

6. Турист шел 3,5 часа, причём за каждый промежуток времени в один час он проходил ровно 5 км. Следует ли из этого, что его средняя скорость равна 5 км/час?

   Решение Пусть он идёт по такому графику: переходы по полчаса со скоростью 10 км/ч и привалы по полчаса. Тогда за 3,5 часа он пройдёт 20 км, и его средняя скорость равняется $20/3{,}5 = 35/7$ км/ч.

   Ответ Нет

Летний городской математический лагерь НИУ ВШЭ 16—26 августа

Повторение, основные определения, системы единиц

1. Василии ведет машину со скоростью 40 км/ч. Он хочет проезжать каждыи километр на 1 минуту быстрее. На сколько ему надо увеличить скорость?

   Решение Скорость 40 км/ч означает в час проезжает 40 км, 1 час= 60 мин, значит Василий проезжает 40км за 60мин, 1 км за 60/40 мин=3/2=1,5 минуты. Василий хочет проезжать каждый километр на 1 минуту быстрее, т. е проезжать каждый километр за 0,5 мин., а за 1 минуту 2 км, значит за 60 минут 120 км. Василию надо увеличить скорость на 80 км в час. 120–40=80 км в час.

   Ответ 80 км в час.

2. Расстояние между Атосом и Арамисом, скачущими по одной дороге, равно 20 лье. За час Атос покрывает 4 лье, а Арамис – 5 лье. Какое расстояние будет между ними через час?

   ДОЛЖНЫ БЫТЬ УКАЗАНЫ ВСЕ ОТВЕТЫ!

   Решение Мушкетёры могли ехать: а) в разные стороны, навстречу друг другу; б) в разные стороны, удаляясь друг от друга; в) в одну сторону – Атос за Арамисом; г) в одну сторону – Арамис за Атосом. Соответственно задача допускает четыре разных ответа. Например, в случае а) за час расстояние уменьшится на 9 лье и составит 11 лье. Аналогично находятся остальные ответы.

   Ответ 11, 29, 21 или 19 лье.

3. Из дома в школу Юра вышел на 5 мин позже Лены, но шёл в 2 раза быстрее, чем она. Через сколько минут после своего выхода Юра догонит Лену?

   Решение Пусть за 5 мин Лена пройдёт расстояние s (км) . Тогда В следующие 5 мин, Юра пройдёт путь 2s (км) , а Лена ещё s (км) , т. е. всего 2s (км) . Следовательно, через 5 мин Юра догонит Лену.

   Ответ 5 минут

4. Дорога от дома до школы занимает у Пети 20 минут. Однажды по дороге в школу он вспомнил, что забыл дома ручку. Если теперь он продолжит свой путь с той же скоростью, то придёт в школу за 3 минуты до звонка, а если вернётся домой за ручкой, то, идя с той же скоростью, опоздает к началу урока на 7 минут. Какую часть пути он прошёл до того, как вспомнил о ручке?

   Решение Если Петя вернётся домой за ручкой, то на весь путь он потратит на $3 + 7 = 10$ минут больше, чем потратил бы, если бы не возвращался. Это значит, что путь от того места, где он вспомнил про ручку, до дома и обратно занимает 10 минут. Следовательно, Петя вспомнил про ручку в 5 минутах ходьбы от дома, то есть он прошёл четверть пути.

   Ответ $1/4$

5. Двое одновременно отправились из А в В. Первый поехал на велосипеде, второй – на автомобиле со скоростью, в пять раз большей скорости первого. На полпути с автомобилем произошла авария, и оставшуюся часть пути автомобилист прошел пешком со скоростью, в два раза меньшей скорости велосипедиста. Кто из них раньше прибыл в В?

   Решение Велосипедист, двигается в два раза быстрее пешехода, поэтому может проехать весь путь за время, которое потребуется пешеходу на половину пути. Но в момент, когда пешеход стартовал, велосипедист уже проехал некоторое расстояние, Поэтому велосипедист приехал раньше

   Ответ Велосипедист

Летний городской математический лагерь НИУ ВШЭ 16—26 августа

Продолжение, движение в реке, относительное движение

1. Вадим и Лёша спускались с горы. Вадим шёл пешком, а Лёша съезжал на лыжах в семь раз быстрее Вадима. На полпути Лёша упал, сломал лыжи и пошёл в два раза медленней Вадима. Кто первым спустится с горы?

   Решение Леша шёл пешком с половины горы столько же времени, сколько Вадим спускался с вершины.

   Ответ Вадим

2. От потолка комнаты вертикально вниз по стене поползли две мухи. Спустившись до пола, они поползли обратно. Первая муха ползла в оба конца с одной и той же скоростью, а вторая хотя и поднималась вдвое медленнее первой, но зато спускалась вдвое быстрее. Какая из мух раньше приползет обратно? У какой из мух выше средняя скорость движения?

   Решение Леша шёл пешком с половины горы столько же времени, сколько Вадим спускался с вершины.

   Ответ Вадим

3. Три бегуна – Антон, Серёжа и Толя – участвуют в беге на 100 м. Когда Антон финишировал, Серёжа находился в 10 метрах позади него, а когда финишировал Серёжа, Толя находился позади него в 10 метрах. На каком расстоянии друг от друга находились Толя и Антон, когда Антон финишировал? (Предполагается, что все мальчики бегут с постоянными, но, конечно, не равными скоростями.)

   Решение Заметьте, скорость Толи составляет $9/10$ от скорости Серёжи. Поскольку скорость Толи составляет $9/10$ от скорости Серёжи, то к моменту, когда финишировал Антон, Толя пробежал $9/10$ расстояния, преодолённого Серёжей, то есть $90 \cdot 9/10 = 81$ м.

   Ответ 19 м.

4. Пароход шел от Нижнего Новгорода до Астрахани 5 суток, а обратно – 7 суток. Сколько времени плывут плоты от Нижнего Новгорода до Астрахани?

   Решение Пусть одновременно из Нижнего вышли плоты и пароход. Если за систему отсчета взять Волгу, то за пять суток пароход отплыл от плотов, а затем за пять суток к ним вернулся. То есть за 10 суток плоты прошли столько, сколько пароход за двое суток проходит против течения, следовательно, плоты будут в пути 35 суток. Основная идея: сменить систему отсчета.

   Ответ 35

5. Пловец плывет вверх против течения Невы. Возле Дворцового моста он потерял пустую фляжку. Проплыв еще 20 минут против течения, он заметил потерю и вернулся догонять флягу; догнал он ее возле моста лейтенанта Шмидта. Какова скорость течения Невы, если расстояние между мостами равно 2 км?

   Решение Относительно фляги пловец двигается с постоянной скоростью в обоих направлениях, поэтому он догонит флягу за 20 минут. Значит, течение за 40 минут "проходит"2 км.

   Ответ 3 км/ч

6. * Иван ехал в поезде Омск-Новосибирск, а Петр – во встречном поезде Новосибирск-Омск. Поезд с Петром пронесся мимо Ивана за 5 секунд, а поезд с Иваном мимо Петра – за 7 секунд. А мимо коровы Мурки, жевавшей траву около путей, оба поезда пронеслись за одинаковое время. За какое?

   Решение Пусть сам рассказывает.

   Ответ 12 сек

7. ** Вовочка сбежал вниз по движущемуся вниз эскалатору и насчитал 45 ступенек. Затем он пробежал вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 105 ступенек.Сколько ступенек насчитал бы Вовочка, спустившись по неподвижному эскалатору?

   Решение Пусть сам рассказывает.

   Ответ 63

Летний городской математический лагерь НИУ ВШЭ 16—26 августа

Круговое движение, движение неточечных объектов

1. Из точки А круговой орбиты далёкой планеты одновременно в одном направлении вылетели два метеорита. Скорость первого метеорита на 10000 км/ч больше, чем скорость второго. Известно, что впервые после вылета они встретились через 8 часов. Найдите длину орбиты в километрах.

   Решение В тот момент, когда они впервые встретились, разница расстояний, которые они пролетели, равна длине орбиты. За 8 часов разница стала 810000=80000 км.

   Ответ 80000 km

2. Вор, укравший сумочку, убегает от хозяйки сумочки по круговой дороге. Скорость вора на 0,5 км/ч больше, чем скорость хозяйки сумочки, которая бегает за ним. Через сколько часов вор догонит хозяйку сумочки во второй раз, если длина дороги, по которой они бегают, равна 300 метрам (считайте, что в первый раз он её догнал уже после кражи сумочки)?

   Решение Первый способ: Вор догонит хозяйку сумочки во второй раз в тот момент, когда расстояние, которое он пробежит, станет на 600 метров больше, чем расстояние, которое пробежит хозяйка сумочки (с момента кражи). Так как его скорость на 0,5 км/ч больше, то за час он пробегает на 500 метров больше, тогда за 1:5=0,2 часа он пробегает на 500:5=100 метров больше. На 600 метров больше он пробежит за 1+0,2=1,2 часа.

   Второй способ: Пусть v км/ч – скорость хозяйки сумочки, тогда v+0,5 км/ч – скорость вора. Пусть t ч – время, через которое вор догонит хозяйку сумочки во второй раз, тогда vt – расстояние, которое пробежит хозяйка сумочки за t ч, (v+0,5)t – расстояние, которое пробежит вор за t ч. Вор догонит хозяйку сумочки во второй раз в тот момент, когда пробежит ровно на 2 круга больше неё (то есть на 600 м = 0,6 км), тогда (v+0,5)tvt=0,60,5t=0,6, откуда t=1,2 ч.

   Ответ 1,2

3. Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 22 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 20 км/ч больше скорости другого?

   Решение Один из них отстаёт от другого на 11 км, так как сказано в условии, что длина трассы 22 километра. Скорость отстающего на 20 километров в час больше (он догоняет того, кто впереди).

   Ответ 33 мин

4. * Отец и сын катаются на коньках по кругу. Время от времени отец обгоняет сына. После того, как сын переменил направление своего движения на противоположное, они стали встречаться в 5 раз чаще. Во сколько раз отец бегает быстрее сына?

   Решение Частота встреч обратно пропорциональна скорости отца относительно сына. Поэтому условие означает, что сумма S скоростей отца и сына в 5 раз больше разности R этих скоростей. Разделив удвоенную скорость отца S + R на удвоенную скорость сына S – R получим отношение их скоростей:

   Ответ В 1,5 раза.

Летний городской
математический лагерь НИУ ВШЭ
16—26 августа

Круговое движение, движение неточечных объектов

1. Из точки А круговой орбиты далёкой планеты одновременно в одном направлении вылетели два метеорита. Скорость первого метеорита на 10000 км/ч больше, чем скорость второго. Известно, что впервые после вылета они встретились через 8 часов. Найдите длину орбиты в километрах.

   Решение В тот момент, когда они впервые встретились, разница расстояний, которые они пролетели, равна длине орбиты. За 8 часов разница стала 810000=80000 км.

   Ответ 80000 km

2. Вор, укравший сумочку, убегает от хозяйки сумочки по круговой дороге. Скорость вора на 0,5 км/ч больше, чем скорость хозяйки сумочки, которая бегает за ним. Через сколько часов вор догонит хозяйку сумочки во второй раз, если длина дороги, по которой они бегают, равна 300 метрам (считайте, что в первый раз он её догнал уже после кражи сумочки)?

   Решение Первый способ: Вор догонит хозяйку сумочки во второй раз в тот момент, когда расстояние, которое он пробежит, станет на 600 метров больше, чем расстояние, которое пробежит хозяйка сумочки (с момента кражи). Так как его скорость на 0,5 км/ч больше, то за час он пробегает на 500 метров больше, тогда за 1:5=0,2 часа он пробегает на 500:5=100 метров больше. На 600 метров больше он пробежит за 1+0,2=1,2 часа.

   Второй способ: Пусть v км/ч – скорость хозяйки сумочки, тогда v+0,5 км/ч – скорость вора. Пусть t ч – время, через которое вор догонит хозяйку сумочки во второй раз, тогда vt – расстояние, которое пробежит хозяйка сумочки за t ч, (v+0,5)t – расстояние, которое пробежит вор за t ч. Вор догонит хозяйку сумочки во второй раз в тот момент, когда пробежит ровно на 2 круга больше неё (то есть на 600 м = 0,6 км), тогда (v+0,5)tvt=0,60,5t=0,6, откуда t=1,2 ч.

   Ответ 1,2

3. Найти скорость и длину поезда, если известно, что он проходит мимо неподвижного наблюдателя в течение 7 секунд и затратил 25 секунд, чтобы проехать вдоль платформы длиной в 378 м.

   Решение На 378 м поезду потребовалось $25 - 7 = 18$ секунд. Следовательно, его скорость равна $378 : 18 = 21$ м/с, а длина $21 \cdot 7 = 147$ м.

   Ответ 21 м/с, 147 м.

4. * Много лет каждый день в полдень из Гавра в Нью-Йорк отправляется почтовый пароход и в то же время из Нью-Йорка отходит идущий в Гавр пароход той же компании. Каждый из этих пароходов находится в пути ровно семь суток, и идут они по одному и тому же пути. Сколько пароходов своей компании встретит на своём пути пароход, идущий из Гавра в Нью-Йорк?

   Решение Подсказка В то время, как пароход из Гавра отходит, в Гавр прибывает пароход, который вышел из Нью-Йорка 7 суток назад.

   Примем время отправления некоторого парохода П из Гавра за начальное и отметим все пароходы, которые он встречает. В то время, как пароход П отходит из Гавра, в Гавр прибывает пароход, который вышел из Нью-Йорка семь суток назад. В момент прибытия парохода П в Нью-Йорк с начального момента прошло семь суток, и в этот момент из Нью-Йорка выходит пароход – последний, который пароход П встречает на своем пути. Таким образом, пароход П встретит все пароходы, которые выходили из Нью-Йорка, начиная с семи суток до начального времени и заканчивая семью сутками после начального времени – всего 15 пароходов (если считать, что пароходы встречаются, когда в один и тот же момент один из них отходит, а другой – прибывает).

   Ответ 15 пароходов.

5. * Отец и сын катаются на коньках по кругу. Время от времени отец обгоняет сына. После того, как сын переменил направление своего движения на противоположное, они стали встречаться в 5 раз чаще. Во сколько раз отец бегает быстрее сына?

   Решение Частота встреч обратно пропорциональна скорости отца относительно сына. Поэтому условие означает, что сумма S скоростей отца и сына в 5 раз больше разности R этих скоростей. Разделив удвоенную скорость отца $S + R$ на удвоенную скорость сына $S - R$ получим отношение их скоростей:

   Ответ В 1,5 раза.

Движение по реке, относительное движение

1. Лодка проплыла некоторое расстояние от пристани по течению реки и вернулась обратно, затратив на весь путь 8ч. Собственная скорость лодки 8 км/ч, а скорость течения реки 2 км/ч. Определите, сколько времени плыла лодка по течению реки и все расстояние, которое она проплыла.

   Решение Пусть расстояние от пристани по течению равно x км (расстояние обратно тоже равно x км). Скорость по течению 8+2=10 км/час, время по течению x/10 часов. Скорость против течения 8-2=6 км/час, время против течения x/6 часов. Общее время 8 часов.

   x/10+x/6=8 / приведем дроби к общему знаменателю 30 /

   3x/30 + 5x/30 = 8

   8x/30 = 8

   8x = 8*30

   X = 240:8

   x = 30 (км) - расстояние по течению (такое же обратно против течения

   30 * 2 = 60 км - все расстояние

   30 : 10 = 3 часа - время по течению **Ответ** 60 км 3 часа

2. В 19 часов от двух пристаней, расстояние между которыми 3 км, одновременно в одном направлении отошли два быстроходных катера. Скорость одного из них была 48км/ч, а другой догонял его со скоростью 54км/ч. В котором часу второй катер догонит первый? (вырази скорости катеров в метрах в минуту, а расстояние в метрах.)

   Решение 48км/ч=800м/мин

   54км/ч=900м/мин

   3км=3000м

   900-800=100м/мин - разница скоростей между 1 и 2 катером

   (3000м)/(100м/мин)=30мин - через это время 1-й катер догонит 2-й катер

   Т.к. оба катера отошли от пристаней в 19 часов, отсюда следует, 19часов+30мин=19часов 30минут

Ответ Второй катер догонит первый катер в 19 часов 30 минут.

3. За 9 часов лодка проходит такое же расстояние по течению, что за 18 часов против. Найти скорость течения, если скорость лодки 6 км/ч.

   Решение Пусть скорость течения х км/час. Тогда скорость по течению 6+х, скорость против 6-х. Расстояние по течению (6+х)*9 равно расстоянию против течения (6-х)*18.

   (6+х)*9=(6-х)*18

   54+9х=108-18х

   27х=54

   Ответ х=2 км/час - скорость течения

4. Пароход шел от Нижнего Новгорода до Астрахани 5 суток, а обратно – 7 суток. Сколько времени плывут плоты от Нижнего Новгорода до Астрахани?

   Решение Пусть одновременно из Нижнего вышли плоты и пароход. Если за систему отсчета взять Волгу, то за пять суток пароход отплыл от плотов, а затем за пять суток к ним вернулся. То есть за 10 суток плоты прошли столько, сколько пароход за двое суток проходит против течения, следовательно, плоты будут в пути 35 суток. Основная идея: сменить систему отсчета.

   Ответ 35

5. Пловец плывет вверх против течения Невы. Возле Дворцового моста он потерял пустую фляжку. Проплыв еще 20 минут против течения, он заметил потерю и вернулся догонять флягу; догнал он ее возле моста лейтенанта Шмидта. Какова скорость течения Невы, если расстояние между мостами равно 2 км?

   Решение Относительно фляги пловец двигается с постоянной скоростью в обоих направлениях, поэтому он догонит флягу за 20 минут. Значит, течение за 40 минут "проходит"2 км.

   Ответ 3 км/ч

Летний городской математический лагерь НИУ ВШЭ 16—26 августа

Решение текстовых задач. Листок 1

1. Однажды Пифагор сказал: "Половина моих учеников изучает прекрасную математику, четверть исследует тайны вечной природы, седьмая часть молча упражняет силу духа, храня в сердце учение. Добавь к ним трех юношей, из которых Теон превосходит прочих своими способностями". Сколько учеников было у Пифагора?

2. Один лилипут весит один миллипуд, а Гулливер весит 80 кг. Тысяча миллипудов - это один пуд, а один пуд - это 16 кг. Сколько лилипутов весят столько же, сколько Гулливер?

3. Некая семья состоит из папы, мамы и нескольких детей. Средний возраст членов семьи - 18 лет. Без 38-летнего папы средний возраст - 14 лет. Сколько детей в этой семье?

4. Пять мальчиков нашли девять грибов. Докажите, что хотя бы двое из них нашли одинаковое количество грибов.

5. Можно ли расставить числа в квадратной таблице 5 на 5 так, чтобы сумма чисел в каждой строке была положительной, а в каждом столбце отрицательной?

6. Некий человек утверждает, что существует составленный из чисел $+1$, 0, -1 квадрат 6 на 6, в котором все суммы по строкам, столбцам и большим диагоналям различны. Опровергните это утверждение.

7. На Земле океан занимает больше половины площади поверхности. Докажите, что в мировом океане можно указать две диаметрально противоположные точки.

8. Из чашки кофе в чашку с молоком перелили ложку кофе, затем такую же ложку смеси перелили обратно. Чего больше: молока в чашке с кофе или кофе в чашке с молоком?

9. Сколькими способами можно представить числа 5 и 10 в виде суммы: а) двух б) трёх натуральных чисел? Разложения, отличающиеся перестановкой слагаемых, считаются одинаковыми.

**Летний городской
математический лагерь НИУ ВШЭ
16—26 августа**

Решение текстовых задач. Листок 1

1. Ответ. 28.
   Решение. Пусть x - количество учеников. Тогда $x/2 + x/4 + x/7 + 3$ =x, откуда $x = 28$.

2. Ответ. 5000
   Решение. Пусть x - такое количество лилипутов, что они весят столько же, сколько Гулливер. Тогда $x \times 0.001 \times 16 = 80, x = 5000$.

3. Ответ. Четверо.
   Решение. Пусть x - количество детей, s - сумма возрастов мамы и всех детей. Из условия на средний возраст с учётом папы $(38 + s)/(x + 2) = 18$ имеем $(38 + s) = 18(x + 2)$, $2 + s = 18x$. Из условия на средний возраст без учёта папы $s/(x + 1) = 14$ имеем $s = 14x + 14$. Подставляя выражение для s, получаем $16 + 14x = 18x$, откуда $16 = 4x, x = 4$.

4. Решение. Предположим противное - все мальчики нашли разное количество грибов. Расставим мальчиков по возрастанию числа найденных грибов. Первый мальчик собрал не меньше нуля грибов, второй - не меньше одного, третий - не меньше двух, четвёртый - не меньше трёх, пятый - не меньше четырёх. Но тогда собрано не меньше десяти грибов $(1 + 2 + 3 + 4 = 10)$. Противоречие.

5. Ответ. Нельзя.
   Решение. Допустим, что можно. Посчитаем сумму чисел. Если считать её по строкам, то сумма будет положительной. Если считать её по столбцам, то сумма будет отрицательной. Противоречие.

6. Решение. Допустим, квадрат составлен. Тогда суммы могут меняться в пределах от -6 до +6, и возможных значений не более 13. Однако нам нужно не менее 14 разных значений: шесть строк, шесть столбцов и две диагонали.

7. Решение. Отразим океан относительно центра Земли. Поскольку сумма площадей океана и его образа превышает площадь земной поверхности, то существует точка, принадлежащая океану и его образу.

8. Ответ. Одинаково.
   Решение. Рассмотрим крайний случай: пусть в чашках налито по одной ложке. Тогда заберем весь кофе. Получим равномерную смесь. В этом случае, следовательно, молока и кофе будет поровну. Всегда ли будет так? Поскольку перелили туда и обратно одну ложку, объём жидкости в чашках не изменился. Следовательно, сколько кофе убыло, столько молока прибыло.

9. Ответ. Число 5 раскладывается в сумму двух натуральных чисел двумя способами, в сумму трёх - тоже двумя способами. Число 10 раскладывается в сумму двух натуральных чисел пятью способами, а в сумму трёх - восемью способами. Полезно нарисовать диаграммы Юнга.

Решение текстовых задач. Листок 2

1. Бутылка с пробкой стоит 10 копеек. Бутылка на 9 копеек дороже пробки. Сколько стоит пробка?
2. Сколькими способами можно представить число 7 в виде суммы четырёх натуральных чисел? Разложения, отличающиеся перестановкой слагаемых, считаются одинаковыми.
3. Яблоки при сушке теряют 84% своей массы. Сколько надо взять свежих яблок, чтобы приготовить 16 кг сушеных?
4. За две картины заплатили 2580 рублей, причем вторая на 15% дороже первой. Сколько стоила первая картина?
5. Смешав два сорта конфет по цене 200 рублей и 400 рублей за килограмм, получили 10кг смеси по цене 290 рублей за килограмм. Сколько килограммов конфет каждого сорта взяли для смеси?
6. В классе 22 ученика. Докажите, что из них можно выбрать четырёх, которые родились в один день недели.
7. Докажите, что среди любых шести человек найдётся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.
8. В квадрате со стороной 10 отметили 201 точку. Докажите, что какие-то три из выбранных точек можно накрыть квадратом со стороной 1.
9. На озере расцвел один цветок. Каждый день число цветков удваивалось, и на двадцатый день всё озеро покрылось цветами. На который день покрылась цветами половина озера?
10. На чудесном дереве растут бананы и ананасы. За один раз с него можно сорвать два и только два плода. Если сорвать два банана или два ананаса, то вырастет новый ананас, а если сорвать один банан и один ананас, то вырастет новый банан. Почти все плоды сорвали, остался только один плод. Какой? В начале бананов было 370.

Летний городской
математический лагерь НИУ ВШЭ
16—26 августа

Решение текстовых задач. Листок 2

1. Ответ. Полкопейки.
2. Ответ. Тремя.

   Решение. Полезно нарисовать диаграммы Юнга.
3. Ответ. 100 кг.

   Решение. Пусть x - масса яблок, которые нужно высушить. Тогда (1-0.84)x = 16, откуда x = 100.
4. Ответ. 1200 рублей.

   Решение. Пусть x - цена первой. Тогда (1+1.15)x = 2580, откуда x = 1200.
5. Ответ. 5.5 кг первого, 4.5 кг второго.

   Решение. Пусть x - масса конфет первого сорта, тогда $10 - x$ - масса конфет второго сорта. Имеем $(200x + 400(10 - x))/10 = 290$, откуда $x = 5.5$ (кг).
6. Решение. Предположим, что в каждый день недели родилось не более трёх детей. Тогда в классе учится не более 21 человека. Противоречие.
7. Решение. Пусть A - один из шести человек. По принципу Дирихле среди остальных пяти человек можно выбрать троих таких, что либо каждый из них знаком с A, либо каждый из них не знаком с A. Без ограничения общности считаем, что B, C, D знакомы с A. Если какие-то двое знакомы друг с другом, то вместе с A они образуют тройку знакомых. Если же B, C, D попарно незнакомы друг с другом, то они образуют тройку незнакомых.
8. Решение. Разобьём квадрат на 100 квадратов со стороной 1. По принципу Дирихле в какой-то из них попадут по крайней мере три точки из выбранных.
9. Ответ. 19.

   Решение. Начнем с конца. Пусть половина озера покрылась цветами сегодня. Тогда всё озеро покроется цветами завтра. Таким образом, завтра - 20 день. Значит, сегодня день 19.
10. Ответ. Ананас.

    Решение. Четность числа бананов не меняется, поэтому бананов всегда четное количество. В конце остался один плод, 1 - нечетное число, поэтому остался ананас.

Летний городской
математический лагерь НИУ ВШЭ
16—26 августа

Решение текстовых задач. Листок 3 extra

1. Мультиграфом называется ориентированный граф, в котором между двумя вершинами может быть несколько стрелок. Дан мультиграф с тремя вершинами: A, B, C. Из A в B ведут три стрелки, из B в C ведут четыре стрелки. Сколько есть путей из A в C?

2. Пусть даны числа 1, 2, ... , n. Расставив их в некотором порядке (без повторений), мы получим перестановку из n элементов. Сколько может быть различных перестановок из пяти элементов? Из семи?

3. Выписали все перестановки чисел от 1 до 7. Найдите количество перестановок, у которых начальные три числа - это числа 3, 5, 7, расставленные в некотором порядке.

4. Было несколько объектов. Человек пересчитал их некоторым способом и насчитал 70. Сколько было объектов, если каждый объект оказался посчитан по пять раз?

5. Пусть даны числа 1, 2, ... , n. Выбрав из них k чисел (порядок уже не важен), получим сочетание из n по k (предполагается, что k не превосходит n). Сочетание из n по k записывается с помощью биномиального коэффициента: $\binom{n}{k}$. Сколько может быть различных сочетаний из семи элементов по пять? Из двадцати по три?

6. Сколько диаграмм Юнга можно вписать в прямоугольник m на n? (то есть в прямоугольник из m строчек и n столбиков).

7. Выписаны все возможные разбиения чисел от 0 до 12 на не более чем четыре слагаемых, причем первое слагаемое не превосходит 3. Сколько разбиений выписано?

8. В команде из двадцати человек нужно выбрать капитана и его помощника. Сколькими способами это можно сделать?

9. В классе учатся 30 человек. Сколькими способами можно выбрать двух равноправных дежурных?

10. Сколько есть битовых слов длины 16 (т.е. слов из единиц и нулей, в которых 16 символов)?

Решение текстовых задач. Листок 3 extra

1. Мультиграфом называется ориентированный граф, в котором между двумя вершинами может быть несколько стрелок. Дан мультиграф с тремя вершинами: A, B, C. Из A в B ведут три стрелки, из B в C ведут четыре стрелки. Сколько есть путей из A в C?

   Ответ. $3 \times 4 = 12$

2. Пусть даны числа 1, 2, ... , n. Расставив их в некотором порядке (без повторений), мы получим перестановку из n элементов. Сколько может быть различных перестановок из пяти элементов? Из семи?

   Ответ. 5!, 7!

3. Выписали все перестановки чисел от 1 до 7. Найдите количество перестановок, у которых начальные три числа - это числа 3, 5, 7, расставленные в некотором порядке.

   Ответ. $3! \times 4! = 144$.

4. Было несколько объектов. Человек пересчитал их некоторым способом и насчитал 70. Сколько было объектов, если каждый объект оказался посчитан по пять раз?

   Ответ. 14.

5. Пусть даны числа 1, 2, ... , n. Выбрав из них k чисел (порядок уже не важен), получим сочетание из n по k (предполагается, что k не превосходит n). Сочетание из n по k записывается с помощью биномиального коэффициента: $\binom{n}{k}$. Сколько может быть различных сочетаний из семи элементов по пять? Из двадцати по три?

   Ответ. $\frac{7!}{5! \times (7-5)!} = 21$

6. Сколько диаграмм Юнга можно вписать в прямоугольник m на n? (то есть в прямоугольник из m строчек и n столбиков).

   Ответ. $\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$

   Решение. Легко видеть, что каждая диаграмма снизу ограничена ломаной, соединяющей нижний левый угол прямоугольника с правым верхним. В такой ломаной m+n звеньев - нам нужно переместиться на m клеточек вправо и на n вверх. Поэтому диаграмм столько же, сколько есть способов выбрать из m+n черточек m вертикальных (или n горизонтальных).

7. Выписаны все возможные разбиения чисел от 0 до 12 на не более чем четыре слагаемых, причем первое слагаемое не превосходит 3. Сколько разбиений выписано?

   Ответ. $\binom{3+4}{4} = 210$.

8. В команде из двадцати человек нужно выбрать капитана и его помощника. Сколькими способами это можно сделать?

   Ответ. $20 \times 19 = 380$

9. В классе учатся 30 человек. Сколькими способами можно выбрать двух равноправных дежурных?

   Ответ. $\binom{30}{2} = 435$.

10. Сколько есть битовых слов длины 16 (т.е. слов из единиц и нулей, в которых 16 символов)?

    Ответ. 2^{16}.

Летний городской математический лагерь НИУ ВШЭ 16—26 августа

Степень вершины.

1) Докажите, что не существует графа у которого степени вершин:

   а) 1, 2, 3, 4, 5

   б) 1, 1, 2, 4, 4

   в) 4, 4, 4, 4, 2

   Решение:
   а) Сложим степени вершин: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Мы знаем, что сумма степеней вершин равна удвоенному количеству ребер, то есть числу четному, но 15 — нечетное. Следовательно, такого графа не существует.
   б) В нашем графе 5 вершин. Заметим, что в нем есть две вершины, степень которх равна 4. Следовательно, из этих вершин идут ребра во все остальные, то есть не может бть вершин степени 1.
   в) В данном графе 5 вершин. Заметим, что из 4 вершин идут ребра во все остальные, то есть из последней пятой вершины должно тоже выходить 4 ребра, и степень не может быть двойкой.

2) В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?
   Решение:
   Заметим, что $100 \cdot 4 = 400$ — количество дорог, посчитанных по два раза. Значит, всего дорог: $400 : 2 = 200$.

3) В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 – по 4 друга, а 10 – по 5 друзей?
   Решение:
   Рассмотрим граф, где люди будут вершинами, а дружба между ними — ребро. Тогда сумма степеней вершин такого графа: $9 \cdot 3 + 11 \cdot 4 + 10 \cdot 5 = 121$. Но сумма степеней графа должна быть четным числом, то есть такого быть не могло.

4) Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?
   Решение:
   Рассмотрим граф, где за вершины возьмем отрезки, а ребра между ними будем проводить, если отрезки пересекаются. У нас получится граф на 9 вершинах, у каждой из которых степень 3. То есть сумма степеней 27. Такое невозможно, следовательно нарисовать так отрезки нельзя.

5) Докажите, что не существует многогранника, у которого было бы ровно семь рёбер.
   Решение:
   Заметим, что если хотя бы одна грань — четырехугольник, то ребер уже не меньше 8. Пусть все грани — треугольники, и их n штук. Тогда ребер: $3 \cdot n/2 = 7$. Тогда: $n = 14/3$, то есть нецелое, что невозможно.

6) Докажите, что число людей, когда-либо живших на Земле и сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.
   Решение:
   Рассмотрим граф, где люди вершины, а рукопожатия между ними ребра. Так как сумма степеней вершин графа четное число, то и вершин с нечетными степенями должно быть четное количество. То есть число людей, сделавших нечетное число рукопожатий, четно.

7) 20 телефонов соединены проводами так, что каждый провод соединяет два телефона, каждая пара телефонов соединена не более чем одним проводом и от каждого телефона отходит не более двух проводов. Нужно закрасить провода (каждый провод целиком одной краской) так, чтобы от каждого телефона отходили провода разных цветов. Какого наименьшего числа красок достаточно для такой закраски?

Решение:
Очевидно, двух цветов недостаточно. Докажем, что хватит трех. Так как из каждого телефона выходит ровно два провода, то граф (вершины — телефоны, ребра — провода) разбивается на связные компоненты — ломанные. Если ломанная замкнутая, то начнем раскрашивать от любой вершины поочередно в два цвета, а последнее ребро покрасим в третий цвет. Если ломанная не замкнутая, то просто покрасим в два цвета шахматной раскраской.

8) В стране есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?
Решение:
Заметим, что из города 9 можно долететь исключительно до городов, номера которых делятся на 3. А из города 1 мы никогда не попадем в эти города, так как из города 1 можно долететь только до городов, номера которых не делятся на три.

9) В стране 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее, чем с семью другими. Докажите, что из каждого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).
Решение:
Рассмотрим граф, где города это вершины, а дороги это ребра. Допустим, мы не можем долететь из города А в город Б. Заметим, что тогда 7 городов, которые соединены с городом А, различны с городами, которые соединены с городом Б. То есть у нас по меньшей мере 16 городов, что противоречит условию.

10) В Тридевятом царстве лишь один вид транспорта – ковер-самолет. Из столицы выходит 21 newline ковролиния, из города Дальний – одна, а из всех остальных городов – по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).
Решение:
Рассмотрим граф, где города это вершины, а ковролинии это ребра. Пусть мы не можем добраться из столицы в Дальний, тогда граф распадается на две связные компоненты. В каждой из них сумма степеней вершин должна быть четным числом, но число вида $20n + 1$ нечетное, следовательно, из столицы мы можем долететь до города Дальний.

Летний городской математический лагерь НИУ ВШЭ 16—26 августа

Деревья

1) Докажите, что в дереве есть вершина, из которой выходит ровно одно ребро (такая вершина называется висячей).
Решение:
Возьмем любую вершину и начнем строить из нее путь, проходя по ребрам только один раз. Заметим, что в дереве нет циклов, значит, наш путь будет конечен. Точка, в которой мы остановимся, и будет висячей.

2) Докажите, что в дереве с количеством вершин больше или равном 2, есть хотя бы две висячие вершины.
Решение:
Найдем одну висячую вершину. Пойдем из нее некоторым путем, проходящим по ребрам только один раз. Наш путь конечен, м не вернемся в вершину, из которой вышли, поэтому найдем вторую висячую.

3) Доказать, что
а) из связного графа можно выкинуть несколько рёбер так, чтобы осталось дерево;
б) в дереве с n вершинами ровно n − 1 ребро;
в) в дереве не меньше двух висячих вершин;
г) в связном графа из n вершин не меньше n − 1 ребра;

4) Дан отрезок OA. Из конца отрезка A выходит 5 отрезков $AB_1, AB_2,$
AB_3, AB_4, AB_5. Из каждой точки B_i могут выходить ещё пять новых отрезков или ни одного нового отрезка и т.д. Может ли число свободных концов построенных отрезков равняться 1001? Под свободным концом отрезка понимаем точку, принадлежащую только одному отрезку (кроме точки O).
Решение:
Заметим, что изначально у нас 5 свободных концов. Когда мы добавляем 5 отрезков, то количество свободных концов увеличивается на 4. Следовательно: $1001 = 5 + 4n$, отсюда $n = 259$. Число свободных концов могло быть 1001.

5) Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50 на 600 клеток. Какое наибольшее число верёвочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?
Решение:
Если представить узлы сетки как вершины, а веревочки как ребра, то в конце у нас должен остаться граф. Узнаем сколько всего было веревок: $51 \cdot 600 + 601 \cdot 50$. Осталось ребер: $51 \cdot 601 - 1$. Считая количество перерезаных веревок, получим: $51 \cdot 600 + 601 \cdot 50 - 51 \cdot 601 + 1 = 50 \cdot 600$.

6) У Царя Гвидона было 5 сыновей. Среди его потомков 100 имели каждый ровно по 3 сына, а остальные умерли бездетными. Сколько потомков было у царя Гвидона?
Решение:
Всего потомков: $100 \cdot 3 + 5 = 305$.

7) В некоторой стране 30 городов, причём каждый соединён с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы из каждого города можно было проехать в любой другой?
Решение:
Рассмотрим граф, в котором города будут вершинами, а дороги ребрами. Когда м закроем дороги на ремонт, м должны получить дерево, то есть дорог закрыто: $29 \cdot 15 - 29 = 29 \cdot 14$.

8) Сколько существует деревьев с 6-ю вершинами?
Решение:
Семь.

городской
математический
ЛАГЕРЬ
НИУ ВШЭ

Летний городской математический лагерь НИУ ВШЭ 16—26 августа

Формула Эйлера

1) Пусть связный плоский граф с V вершинами и E рёбрами разрезает плоскость на F кусков. Докажите формулу Эйлера: V – E + F = 2.

2) Можно ли расположить на плоскости

   а) 4 точки так, чтобы каждая из них была соединена отрезками с тремя другими (без пересечений)?

   б) 6 точек и соединить их непересекающимися отрезками так, чтобы из каждой точки выходило ровно 4 отрезка?
   Решение:
   а)Да, можно. Возьмем треугольник и точку внутри него. Соединим все точки с друг другом. б) Возьмем треугольник и треугольник меньшего размера внутри него. Соединим каждую вершину большого треугольника с двумя вершинами меньшего треугольника.

3) В стране Озёрная семь озер, соединённых между собой десятью непересекающимися каналами, причём от каждого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в этой стране островов?
   Решение:
   Пусть озера — вершин графа, реки будут ребрами, тогда острова — это грани. Воспользуемся формулой Эйлера: $7 - 10 + F = 2$, отсюда: $F = 5$. Но так как одна грань это суша, то островов 4.

4) Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и соединить тропинками каждый дом с каждым колодцем так, чтобы тропинки не пересекались?
   Решение:
   Пусть дома это вершины графа, а дороги это ребра. Тогда, по формуле Эйлера у нас должно быть граней. Заметим, что каждая грань образуется ровно 4 дорогами (так как дорог между домами и колодцами нет), то есть ребер $5 \cdot 4 : 2 = 10$. Но их количество должно быть равно 9, ведь от каждого дома входит по 3 дороги. Получаем, что такого не могло быть.

5) Докажите, что для плоского графа справедливо неравенство 2E $\geqslant$ 3F.
   Решение:
   Поставим у каждого ребра две точки: по одной в каждом из прилегающих к нему кусков. В каждый кусок попадёт не меньше трёх точек, поэтому всего точек не меньше 3F. С другой стороны, точек ровно 2E.

6) В квадрате отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?
   Решение: Будем считать отмеченные точки и вершины квадрата вершинами, а соединяющие их отрезки и стороны квадрата — рёбрами плоского графа. Для каждого куска, на которые этот граф разбивает плоскость, подсчитаем число ограничивающих его рёбер, и все полученные числа сложим. Поскольку каждое ребро разделяет два куска, то в итоге получим удвоенное число рёбер. Так как все куски, кроме внешнего – треугольники, а внешний кусок ограничен четырьмя рёбрами, то $3(F\breve{}1) + 4 = 2E$, то есть $E = 3(F\breve{}1) : 2 + 2$. Заметим, что число вершин нашего графа равно 24 и подставим количества вершин и рёбер в формулу Эйлера: $24\breve{}(0.5 \cdot (F\breve{}1) + 2) + F = 2$. Отсюда $F = 43$. Таким образом, число треугольников, на которые разбился квадрат, равно 42.

7) Докажите, что для плоского графа справедливо неравенство 3V – 6 $\geqslant$ E.
   Решение:
   Подставим в формулу Эйлера неравенство полученное в предыдущей задаче: $V\breve{}E + 2E/3 \geqslant 2$, откуда $E \leqslant 3V\breve{}6$.

8) Докажите, что граф, имеющий 10 вершин, степень каждой из которых равна 5, – не плоский.
Решение:
Не вполняется неравенство $E \leqslant 3V\breve{}6$, которое мы доказали в прошлой задаче.

Летний городской
математический лагерь НИУ ВШЭ
16—26 августа

Теория чисел. Нок и Нод. Решение и комментарии

Напомнить теорию:

0 **Разминка**: Найти НОД и НОК:
а) 40 и 32
б) 54 и 86
Для чего: Чтобы все дети включились в процесс. Слабенькие разбираются, как работает алгоритм, сильные вспоминают. Важно, так как многие ученики любят с небольшими числами искать НОД и НОК перебором.
Ответ: а) 8 и 160, б) 2 и 2322

1. Батончики "Рот Фронт"продаются по 12 штук в упаковке, а конфеты "Степ"– по 15 штук в упаковке. Какое наименьшее число упаковок конфет того и другого сорта необходимо купить, чтобы тех и других конфет было поровну?
Для чего: показать, в каких текстовых задачах и как именно "маскируется"тот же НОД
Решение: НОК(12, 15) = 60. Значит, пять упаковок первого сорта, 4 второго

2.Докажите, что для любых натуральных чисел a и b верно равенство НОД(a, b)НОК(a, b) = ab.
Подсказка: Пусть a = a'НОД(a, b), b = b' НОД(a, b). Чему равен НОД(a',b')?
Для чего: тренировка навыка решать и доказывать задачи не на конкретном примере, а в общем случае
Решение: Из определения НОД следует, что a = a'НОД(a, b), b = b' НОД(a, b), где НОД(a', b') = 1. Из определения НОК следует, что НОК(a, b) = a'b' НОД(a, b). Поэтому НОД(a, b)НОК(a, b) = a'b' НОД(a, b)НОД(a, b) = ab.

3. Сосуд был до краев заполнен водой. Эту воду поровну перелили в три бутылки. Оказалось, что в первой бутылке вода заняла половину ее объёма, во второй бутылке вода заняла $\frac{2}{3}$, а в третьем – $\frac{3}{4}$ ее объёма. Сосуд и все три бутылки вмещают по целому числу литров. При каком наименьшем объёме сосуда возможна такая ситуация?
Для чего: показать, в каких текстовых задачах и как именно "маскирует-ся"тот же НОД
Решение: В каждую бутылку перелито по $\frac{1}{3}$ объёма сосуда. Значит, объём первой бутылки равен $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ сосуда, объём второй – $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ сосуда, а объём третьего – $\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$ сосуда. Все эти количества – целые числа, поэтому объём сосуда делится на 3, 2 и 9. НОК(2, 3, 9) = 18. Значит, минимальная вместимость сосуда – 18 л.

Решение уравнений в целых числах

Теория: Линейным диафантовым уравнением с двумя неизвестными называется уравнение вида $ax + by = c$, где a,b,c - известные целые числа, а x,y - неизвестные целые числа.
Факт:Линейное диафантово уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда c $\vdots$ НОД(a,b)
Решение имеет вид $x = x_o + \frac{b}{(a,b)} * k$, y=$y_o - \frac{a}{(a,b)} * k$, где $k \in \mathbb{Z}$
4. Решите следующие уравнения в целых числах:
а) 20x + 12y = 2013
б) 5x+3y=7
в) 6x-9y=11
г) 2x+3y=7

на Алгоритм Евклида
д) 87x-64y=1
е) 87x-64y=3
Для чего: познакомить с линейными диафантовыми уравнениями
Решение: а,в - решений нет, см. факт
б)x=2-3k, y=-1+5k
г)x=-1+3k, y=3-2k
д)x=-25-64k, y=-34-87k
е)x=-75-64k, y=-102-87k

5.a, b, c – целые числа; a и b отличны от нуля. Докажите, что уравнение $ax + by = c$ имеет решения в целых числах тогда и только тогда, когда c делится на $d =$ НОД(a, b).

Для чего: доказательство факта, которым в дальнейшем придется пользоваться.

Решение:

Необходимость. Любое число вида $ax + by$ делится на d.

Достаточность. Достаточно проверить, что имеет решение уравнение $ax + by = d$. Кроме того, можно считать, что a и b положительны.Рассмотрим наименьшее натуральное число m, являющееся линейной комбинацией чисел a и b (то есть представимое в виде $ax + by$). Разделим a на m с остатком: $a = qm + r$. Число $r = a - qm$ также является линейной комбинацией чисел a и b, но оно меньше m. Значит, $r = 0$, то есть a кратно m. Аналогично b кратно m. Следовательно, и d делится на m, и поэтому является линейной комбинацией чисел a и b.

6. Если $a=b\cdot q+c$, где a, b, c и q – целые числа, то множество общих делителей чисел a и b совпадает со множеством общих делителей чисел b и c, в частности, НОД(a, b)=НОД(b, c). Докажите это свойство

Решение: Так как имеет место равенство $a=b\cdot q+c$, то всякий общий делитель чисел a и b делит также и c (это следует из свойств делимости). По этой же причине, всякий общий делитель чисел b и c делит a. Поэтому совокупность общих делителей чисел a и b совпадает с совокупностью общих делителей чисел b и c. В частности, должны совпадать и наибольшие из этих общих делителей, то есть, должно быть справедливо следующее равенство НОД(a, b)=НОД(b, c)

Алгоритм Евклида: Пусть a и b — целые числа, не равные одновременно нулю, и последовательность чисел

$a > b > r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > \ \dots\ r_n$ определена тем, что каждое r_k это остаток от деления предпредыдущего числа на предыдущее, а предпоследнее делится на последнее нацело, то есть:

$a = bq_0 + r_1$
$b = r_1q_1 + r_2$
$r_1 = r_2q_2 + r_3,$
$\vdots$
$r_{k-2} = r_{k-1}q_{k-1} + r_k,$
$r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n$
$r_{n-1} = r_nq_n$
Тогда НОД(a, b) равен r_n. Докажите, что это верно
Решение:
Существование таких r1, r2, ..., rn, то есть возможность деления с остатком m на n для любого целого m и целого n 0, доказывается индукцией по m.

Корректность этого алгоритма вытекает из следующих двух утверждений:

Пусть a = bq + r, тогда НОД (a, b) = НОД (b, r)
НОД(r, 0) = r для любого ненулевого r (так как 0 делится на любое целое число, кроме нуля).

Раскраски

Задача 0 достаточно широко известна и является прототипом многих дальнейших задач. Она демонстрирует, как в принципе можно доказывать невозможность разрезания, а также то, что целое отношение площадей фигур ($62 = 2 \cdot 31$) необходимо, но недостаточно для наличия способа разрезания.

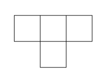
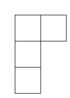
0. Можно разрезать на плитки домино (прямоугольники 1×2) шахматную доску, из которой вырезали две противоположных угловых клетки?
   Ответ: нельзя
   Решение: две вырезанные клетки были одного цвета, поэтому на доске осталось неравное число черных и белых клеток. Но каждая плитка домино будет состоять из одной белой и одной чёрной клетки.

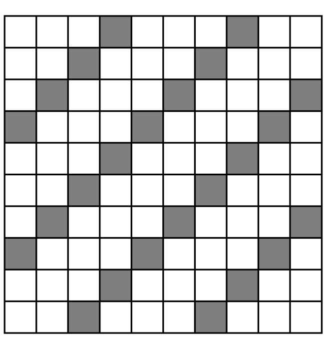
Следующие две задачи в определенном смысле сходны и показывают, как шахматная раскраска может применяться вместе с рассуждениями о чётности.

1. На доске 9×9 в каждой клетке стоит пешка. Можно ли передвинуть каждую из них на соседнюю (по стороне) клетку, так чтобы в каждой клетке снова было по одной пешке?
   Ответ: нельзя
   Решение: при шахматной раскраске доски пешки поменяют цвет поля, на котором они стоят. Всего полей нечетное количество, поэтому пешек на белых и черных клетках неравное число.

2. Можно ли обойти доску 7×9 шахматным конём и вернуться на исходное поле, побывав в каждом из остальных ровно по одному разу?
   Ответ: нет.
   Решение: чтобы обойти 63 поля и вернуться на исходное, конь должен сделать 63 хода. В то же время, после нечетного числа числа ходов конь не может попасть на поле того же цвета, с которого он начинал.

В следующих задачах возможно (а где-то необходимо) применение менее привычных раскрасок и несколько более сложных рассуждений, например, о площади и необходимом числе фигур. Они могут допускать много возможных решений – в качестве примера см. статью Д. Кузнецова “О методе раскраски на примере одной задачи”, Квант, 2015-№3.

3. Можно ли разрезать шахматную доску без угловой клетки на прямоугольники 1×3?
   Ответ: нет.
   Решение: Раскрасим доску циклически чередующимися диагоналями трёх цветов, тогда в каждом прямоугольнике будет по одной клетке каждого цвета. Поскольку 64 не делится на 3, клеток трёх цветов будет неравное количество – 22, 21 и 21. При необходимости повернув диагонали, мы вырежем угловую клетку одного из двух последних цветов, получив по 22, 21 и 20 клеток трёх цветов.
4. Можно ли доску 8×8 разрезать на а) Т-тетрамино; б) Г-тетрамино; в) прямоугольники 1×4? А доску 10×10?
    
   Решение: Доску 8×8 можно разрезать на фигуры всех трёх видов, доску 10×10 разрезать нельзя. Площадь доски – 100, поэтому тетрамино любой из трёх форм понадобилось бы 25. а) При шахматной раскраске в каждом Т-тетрамино будет три или одна клетка каждого из двух цветов, значит, в 25 тетрамино в сумме – нечётное количество клеток каждого из двух цветов. Но на доске 50 белых и 50 чёрных клеток. б) Аналогично, при раскраске в чередующиеся вертикальные полосы в каждом тетрамино три или одна клетка каждого из двух цветов. в) Если отметить 24 клетки как на рисунке, каждый прямоугольник 1×4 на доске будет содержать ровно одну отмеченную клетку, и на 25 прямоугольников доску разрезать нельзя.

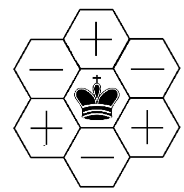
5. На поле для «морского боя» стоит один линкор (прямоугольник 1×4). За какое наименьшее количество выстрелов гарантированно можно «ранить» его?

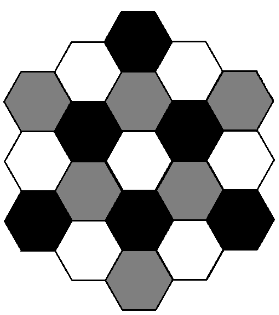
Ответ: 24.
Решение: За 24 выстрела можно гарантированно попасть в линкор, см. решение предыдущей задачи. В то же время, на поле можно было бы разместить 24 непересекающихся линкора, поэтому меньше 24 выстрелов заведомо недостаточно (даже если бы мы знали, что линкор стоит на одной из этих позиций, в худшем случае пришлось бы проверить их все).

6. На шахматной доске выбраны 200 клеток. Докажите, что из них можно выбрать 50 клеток, которые не соприкасаются по стороне или углу.
Решение: раскрасим клетки доски в 4 цвета так, чтобы клетки одного цвета не соприкасались. По принципу Дирихле клеток одного из цветов будет не меньше 50.

7. Дно коробки замощено квадратными плитками 2×2. Все плитки вытащили из коробки, и одну из них заменили на прямоугольник 1×4. Докажите, что полученным набором фигур уже нельзя выложить дно коробки.
Решение: Допустим, что мы могли бы это сделать, положив прямоугольник вертикально. Раскрасим коробку в чередующиеся вертикальные полосы двух цветов. Тогда каждый квадрат содержит по 2 черные и белые клетки, значит, черных и белых клеток в коробке одинаковое число. Но вертикальный прямоугольник должен содержать 4 чёрные либо 4 белые клетки, и вместе с квадратами не может покрывать равное число чёрных и белых клеток. Так же доказывается, что горизонтально положить прямоугольник тоже нельзя.

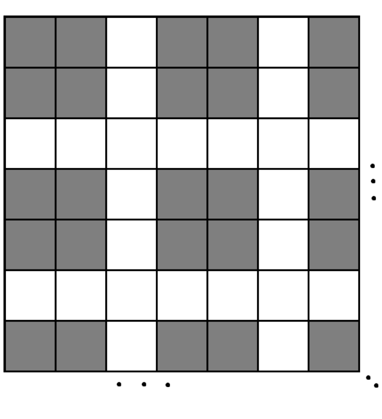
8. Плоскость разбита на клетки в виде правильных шестиугольников. За ход король перемещается вверх, вправо-вниз или влево-вниз, см. рисунок. Король сделал несколько ходов и вернулся на исходную клетку. Чему может быть равно число сделанных ходов? (Докажите, что оно делится на 3)
Решение: раскрасим клетки в три цвета так, чтобы при ходах они сменялись в циклическом порядке (см. рисунок).



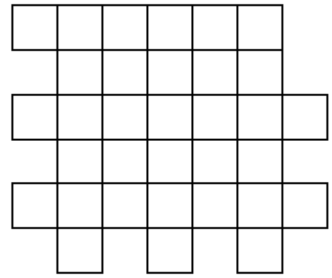


9. Можно ли из 13 кирпичей $1 \times 1 \times 2$ сложить куб $3 \times 3 \times 3$ с дыркой $1 \times 1 \times 1$ в центре? *(Автор: Ботин Д.А.)*
Решение: при шахматной раскраске куб будет содержать неравное число клеток двух цветов.

10. Из листа клетчатой бумаги размером 29×29 клеточек вырезали 99 квадратиков 2×2 по линиям сетки. Докажите, что из оставшейся части листа можно вырезать ещё хотя бы один такой же квадратик. *(Автор: Фомин С.В.)*
Решение: закрасим на доске 100 квадратов 2×2, как на рисунке. Тогда любой другой квадрат такого размера на доске пересекает ровно один из закрашенных. Поэтому после вырезания 99 квадратов хотя бы один из закрашенных квадратов не будет затронут.



11. Докажите, что данную фигуру нельзя разделить по сторонам клеток на 3 равные части.



Решение: Рассмотрим шахматную раскраску на доске, и назовём разность числа чёрных и белых клеток в некоторой фигуре её *мрачностью.* Для равных фигур мрачность равна либо противоположна, а мрачность объединения нескольких фигур равна сумме их мрачности. Мрачность фигуры на картинке равна 7, а единственный способ представить 7 как сумму трёх равных или противоположных чисел – $7+7-7$. Значит, мрачность одной части из 11 клеток равна 7, то есть она состоит из 9 и 2 клеток двух цветов соответственно. Но можно проверить, что такой связной фигуры не существует.

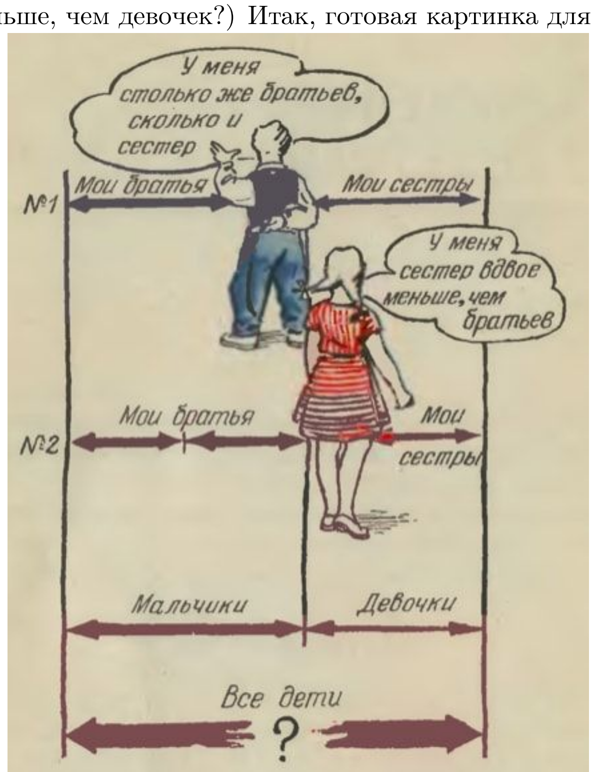
Летний городской
математический лагерь НИУ ВШЭ
16—26 августа

Применение одномерных диаграмм

Определение. Одномерная диаграмма – это обычно отрезок или несколько отрезков, длины которых соответствуют численным значениям рассматриваемой величины (отрезки могут быть заменены прямоугольниками одинаковой ширины).

1) Мальчика спросили, сколько у него братьев и сестер. Он ответил «Столько же братьев, сколько и сестер.» Тогда спросили сестру, сколько у нее братьев и сестер. Она ответила: «У меня сестер вдвое меньше, чем братьев». Сколько было братьев и сколько было сестер? (Мальчик и девочка, отвечая на вопросы, не считают себя.)

   Решение и указания: Первым делом, можно попробовать решить задачу устно. Обычно дети дают неправильный ответ, вроде: мальчиков – 3, девочек – 2. Опровергая этот ответ, дети приходят к правильному. Затем мы пытаемся "изобразить" решение задачи: рисуем отрезок, изображающий общее количество детей. Выделяем отрезок, обозначающий мальчика. Затем спрашиваем: Как изобразить условие о том, что число мальчиков равно числу девочек? Дети послабее обычно долго приходят к тому, что девочек и мальчиков должны изображать равные отрезки. Затем, изображаем другой отрезок и условие для девочки (здесь полезно задать аналогичный вопрос: Что означает на картинке, что мальчиков вдвое больше, чем девочек?) Итак, готовая картинка для мальчиков и девочек:



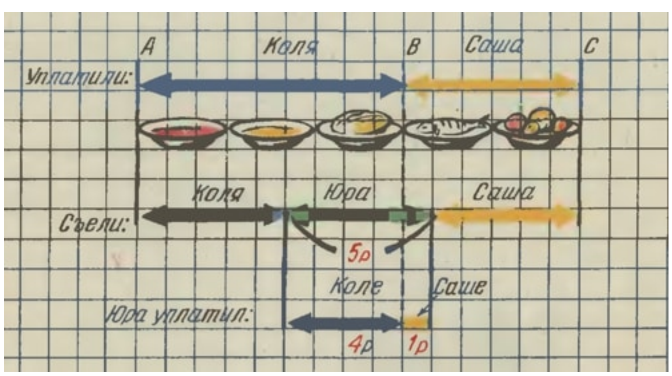
   Так как общее число мальчиков и девочек вполне определенное, то длина всей диаграммы №1 (вместе с отрезком, занятым мальчиком), равна длине всей диаграммы №2 (вместе с отрезком, занятым девочкой.

Пусть мальчик и девочка "уйдут" из диаграмм. Сомкнем оставшиеся отрезки на каждой диаграмме. Образовались новые диаграммы одинаковой длины:

Разность красных отрезков изображает одну девочку, которая составляет $\frac{1/2}{-}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ часть от общего числа детей, уменьшенного на единицу. Отсюда общее число детей равно 7.Девочек – 3, мальчиков – 4. Затем можно решить эту же задачу уравнением с двумя переменными и получить тот же результат, что подведет к решению систем уравнений.

2) Коля уплатил в кассу столовой за три блюда, а Саша – за два блюда (все пять блюд – одинаковой стоимости). Только они сели за стол, как к ним присоединился Юра, и они втроем съели поровну все пять блюд. При расчете приятелей между собой выяснилось, что Юра должен уплатить за съеденное им 5 рублей. Сколько из этих денег следует Коле и сколько Саше?

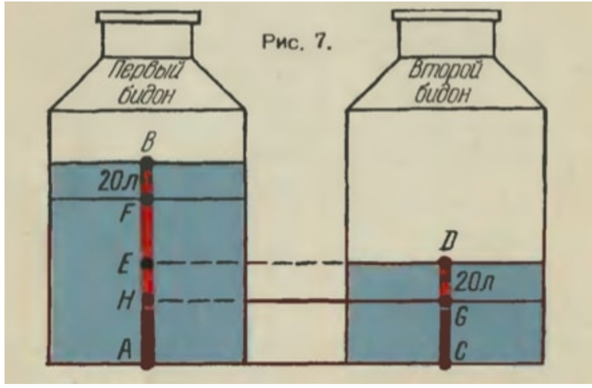
   Решение и указания: Данную задачу дети решают сами. Перед решением стоит обсудить, какой длины будет наша диаграмма? Если ответа не последует, следует спросить, отрезок из скольких клеток удобно делить на три равные части? А на 5? Так дети понимают, что оптимальный отрезок – 15 клеток. На диаграмме изобразим условие задачи:



   Если нанесение условия на диаграмму вызывает трудности, можно обсудить, что же изображает наша диаграмма? Сколько клеток составляет одно блюдо? А за сколько клеток заплатили Коля и Саша? После четкого изображения условий, мы видим ответ: Юра должен Коле 4 рубля, Саше 3 рубля. Задачу также можно решить арифметически (рассчитать стоимость одного блюда).

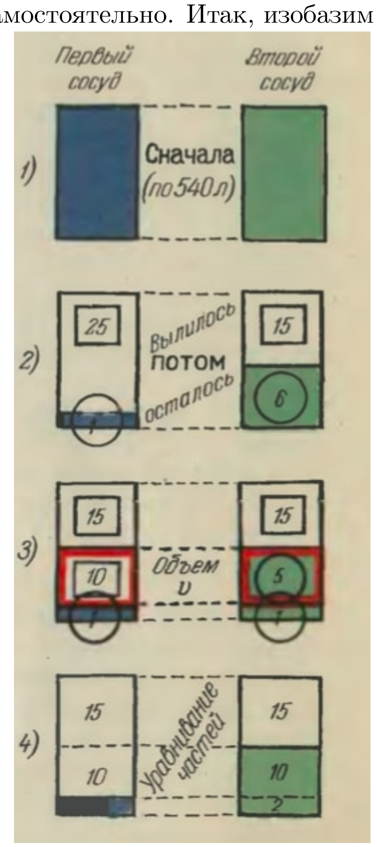
3) В одном бидоне вдвое больше молока, чем в другом. Когда из обоих бидонов отлили по 20 литров молока, то в первом бидоне оказалось втрое больше молока, чем во втором. Сколько литров молока было первоначально в каждом бидоне?

Решение и указания: Данная задача требует четких геометрических выкладок. Ответ задачи дети угадывают очень быстро, а объяснить его единственность они не могут. Поэтому лучше нарисовать чертеж на доске и предложить понять, какие части бидонов можно сравнить:



После изображения риунка, дети понимают, что $HA = CG$ и $HA = \frac{1}{3}CG$ и после этого снова получают нужный ответ. Но здесь нужно обратить их внимание на то, что они не учитывают все условия задачи и берут ответ из ниоткуда. Полное решение: $BA = 2DC$, $BE = EA = DC$, так как $BF = DG$, то и $FE = GC = HA$. $FE + HA = \frac{2}{3}FA$, так как $HA = \frac{1}{3}FA$. Значит, $EH = \frac{1}{3}FA$ и $FA = 60$ л. Получаем ответ: в первом сосуде содержится $60 + 20 = 80$, во втором – 40 л.
Некоторые дети решили эту задачу при помощи уравнений с двумя переменными.

4) Два сосуда, объемом по 540 л, наполнены водой. Из первого вытекает каждую минуту 25 л, из второго 15 л. Через сколько минут во втором сосуде останется в 6 раз больше воды, чем в первом?
Решение и указания: Данную задачу мы разбирали вместе на доске. Её можно разобрать до задачи 3), тогда задачу 3) дети решат самостоятельно. Итак, изобазим состояния воды на диграммах:



С детьми мы выдумывали новые единицы измерения: 1ов = 1 часть оставшейся воды, 1вв = 1 часть вытекшей воды. Устанавливаем, что в первом сосуде содержится 25вв и 1ов, во втором – 15вв и 6 ов. Теперь нужно научиться переводить ов в вв. Для этого отделим на втором сосуде 1 ов (см. рисунок), а на первом сосуде часть, равную 15 ов. Тогда (опять же см. рисунок) получим, что 10вв = 5 ов. Тогда в сосудах содержится 27 вв = 540 л. из первого сосуда вылилось 25 вв = 500 л. На это потребовалось $500 : 25 = 20$ минут.
Придумыание единиц измерения и способов их сравнения поможет детям решить задачу 4).

5) Профессор физики А.В. Цингер в своих воспоминаниях о Л.Н. Толстом приводит задачу, сообщенную ему великим писателем: «Артели косцов надо было скосить два луга – один вдвое более другого. Половину дня вся артель косила больший луг. После полудня артель артель разделилась пополам: первая половина осталась на большем лугу и докосила его к вечеру до конца, а вторая половина косила малый луг, на котором к вечеру остался малый участок, скошенный на другой день одним косцом, проработавшим целый день. Сколько было косцов в артели?»

   Предполагается, что полдень делит рабочий день косцов на две равные части; производительность труда всех косцов одинакова.

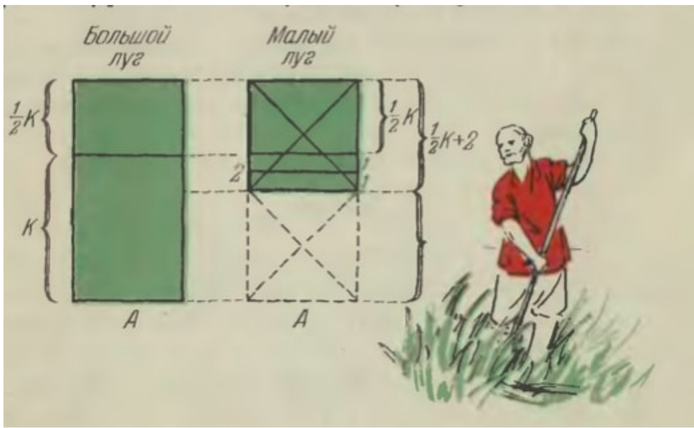
   По-видимому, А.В. Цингер предложил Льву Александровичу какое-то наглядно-геометрическое решение этой задачи, так как далее в своих воспоминаниях он пишет:

   «Берем клочок бумаги, чертим. На чертеже Лев Николаевич сразу ясно понимает неожиданную простоту задачи.

   -Ах, как хорошо, – говорит он. Теперь все совершенно просто и ясно.

   И Лев Николаевич идет рассказывать задачу гостям за почетным столиком графини».

   Решения и указания:Эта задача шла в качестве домашнего задания, многие дети с ней справились. Пусть число косцов равно K. За первую половину дня K косцов скосят большой на большом лугу площадь, которую мы изобразим прямоугольником с высотой K. Основание прямоугольника (произвольное) обозначаем через А.



   За вторую половину дня половина косцов (т.е. $\frac{1}{2}K$) скосит на том же лугу площадь, соответствующую прямоугольнику со сторонами A и $\frac{1}{2}K$. Следовательно, левый составной прямоугольник соответствует площади большого луга. Высота этого прямоугольника равна $\frac{3}{2}K$.

   За вторую половину первого дня $\frac{1}{2}K$ косцов скосят на малом лугу площадь, соответствующую прямоугольнику со сторонами A и $\frac{1}{2}K$. За две половины второго дня один косец скосит на втором лугу площадь, соответствующую прямоугольнику, одна сторона которого по-прежнему A, а другая равна $1 + 1 = 2$. Правый составной прямоугольник имеет высоту $\frac{1}{2}K + 2$ и соответствует площади малого луга. По условию, малый луг вдвое меньше большого луга, следовательно, $\frac{1}{2}K + 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}K$ или $\frac{1}{4}K = 2$. Отсюда число косцов $K = 8$.

   На занятии дети вводили новую переменную - 1 б.л.(большой луг) и выражали через эту переменную все площади.

6) На двух кустах сидело 25 воробьев. После того, как с первого куста перелетело на второй 5, а со второго совсем улетело 7 воробьев, на первом кусте осталось вдвое больше воробьев, чем на втором. Сколько воробев было на каждом кусте первоначально?

   Указания: Решение дети придумывают самостоятельно. В классе с большой вероятностью найдется ребенок, решивший задачу уравнением, а также ребенок, решийвший геометрически. Полезно разобрать на доске оба варианта.

Урок рассчитан на два академических часа. Все задачи и решения были взяты из учебника "Геометрия помогает арифметике" Островского А.И. и Кордемского Б.А. В учебнике можно найти сложные задания по данной теме, предназначенные для сильных учащихся кружка с каким-то олимпиадным опытом.

Летний городской
математический лагерь НИУ ВШЭ
16—26 августа

Теория чисел для мелких. Четность и нечетность. Решения и комментарии

Напоминание: четные числа можно представить в виде 2k, а нечетные в виде 2k+1, где k - целое число.

0.I Четной или нечетной будет сумма:

а)Двух четных чисел?

б)Двух нечетных?

в) Четного и нечетного?

г) любого количества четных?

д) любого количества нечетных?

е) Докажите пункт а), б), в)

(*Подсказка:* См. напоминание. Представь сумму в таком же виде)

0.II Те же вопросы для произведения

Для чего: разминка после лета, разговорить детей. Быстрое устное обсуждение.

Решение е) для пункта а): $2k + 2m = 2(k + m) = 2n \to$ сумма четная

1.Чётно или нечётно число 1 + 2 + 3 + ... + 1990?

Для чего: напомнить, как не ошибаться в подсчете нечетных

Решение: 995 нечетных слагаемых, значит сумма нечетна

2. Пусть m и n – целые числа. Докажите, что mn(m + n) – чётное число.

Для чего: показать, как происходит разбор случаев в такого рода задачах

3. Ваня рассказывал Гоше о статистике предупреждений за ЧМ 2018. Он утверждал, что сумма желтых карточек европейских стран и южноамериканских равно 101, а произведение 177. Могло ли такое произойти?

Для чего: показать, как свести к четности текстовую задачу

Решение: по сумме понимаем, что одно слагаемое четное, а другое нет. Противоречие с произведением

Факт: Сумма двух чисел и их разность имеют одну четность. Почему?
4. На футбольный матч пришло одинаковое количество болельщиков обеих команд. Каждый из них купил воду либо с газом, либо без, причем людей, не купивших воду, не было. Продавцы сообщили, что газированной воды продано на 123 бутылки меньше. Докажите, что их отчет ошибочен.
Для чего: показать, что четность в условии может быть завуалирована. Отработка факта.
Решение: одинаковое количество болельщиков обеих команд, значит их общее число четное. Раз все купили воду, значит сумма купленных газированных и негазированных бутылок воды тоже четная. Но по условию их разница нечетная. Протиоречие с фактом.

5. У каждого марсианина три руки. Могут ли семь марсиан взяться за руки?
Для чего: показать, как через четность решать задачи на цепочки/круги
Решение: Всего рук 21 – нечётное число. Если бы они взялись за руки, то руки разбились бы на пары (в каждую пару входят две пожимающие друг друга руки), а это невозможно.

6. Ученица 5 класса Катя и несколько её одноклассников встали в круг, взявшись за руки. Оказалось, что каждый держит за руки либо двух мальчиков, либо двух девочек. Если в кругу стоит пять мальчиков, то сколько там стоит девочек?
Для чего: показать, как через четность решать задачи на цепочки/круги
Решение: Если где-то рядом стоят две девочки, то рядом с ними – снова девочки, рядом с ними снова девочки и т.д. В этом случае мальчиков вообще нет, что противоречит условию. Аналогично придём к противоречию, предположив, что где-то рядом стоят два мальчика. Таким образом, мальчики и девочки чередуются. Отсюда следует, что их равное количество, то есть всего девочек пять.

7. На хоккейном поле лежат три шайбы A, B и C. Хоккеист бьёт по одной из них так, что она пролетает между двумя другими. Так он делает 27 раз. Могут ли после этого шайбы оказаться на исходных местах?
Для чего: обсудить четность перестановки
Решение: Когда шайбы A, B, C не расположены на одной прямой, они идут в порядке A-B-C либо по часовой стрелке, либо против часовой. Будем называть расположение шайб правильным, если обходя вершины треугольника ABC в порядке A-B-C, мы получим обход по часовой стрелке, и неправильным в противном случае. Легко видеть, что при каждом ударе тип расположения меняется. Значит, после каждого нечётного удара, расположение шайб будет иным, нежели в самом начале.

8. В ряд выписаны числа 1, 2, 3, ..., n. За один ход разрешается поменять местами любые два числа. Может ли после 1989 таких операций порядок чисел оказаться исходным?

Для чего: доказательство на пальцах факта "транспозиция меняет четность перестановки". Пригодится на олимпиадах

Решение: каждая пара (a, b) чисел может находиться в двух состояниях: правильном, когда меньшее число стоит левее, и неправильном, когда меньшее число стоит правее. Если между числами a и b стоит ровно k чисел, и мы поменяем a и b местами, то ровно $2k + 1$ пара поменяет свое состояние: сама пара (a, b) и все пары, содержащие одно из чисел a, b и одно из k промежуточных чисел. Поэтому каждая операция меняет четность числа неправильных пар. В начале все пары были правильными. Значит после 1989 операций число неправильных пар станет нечётным. Следовательно, полученный ряд чисел не совпадает с исходным.