Лекция 10-19. Задача Коши для уравнения теплопроводности

1 Постановка задачи

Рассмотрим длинный тонкий стержень, толщиной которого мы пренебрегаем. Будем отождествлять этот стержень со всей числовой прямой. Температуру стержня в момент времени t в точке x обозначим через $u(t,x)$. С течением времени тепло перераспределяется внутри стержня; этот процесс описывается *уравнением теплопроводности*

$$u_t = u_{xx}. \tag{1}$$

Часто в правой части пишут коэффициент a^2, но от него можно избавиться изменением масштаба. Ход процесса определен однозначно, если известно начальное условие

$$u|_{t=0} = f(x). \tag{2}$$

Задача (1), (2) называется *задачей Коши для уравнения теплопроводности.*

2 Задача Коши для преобразования Фурье неизвестной функции.

Мощным инструментом в исследовании задачи Коши (не только для для уравнения теплопроводности) является переход от неизвестной функции u к ее преобразованию Фурье по x:

$$v(t,\alpha) = \mathcal{F}_x u(t,x) = \int u(t,x)e^{-i\alpha x}dx.$$

Уравнение (1) с начальным условием (2) переходит в следующую задачу Коши:

$$v_t(t,\alpha) = -\alpha^2 v(t,\alpha),\ v|_{t=0} = \tilde{f}(\alpha). \tag{3}$$

Это - обыкновенное дифференциальное уравнение относительно v как функции от t, зависящее от α как от параметра. Задача (3) мгновенно решается:

$$v(t,\alpha) = e^{-\alpha^2 t}\tilde{f}(\alpha).$$

Успех! Мы нашли преобразование Фурье от искомой функции. Остается только его обратить.

3 Формула Пуассона.

В этом разделе мы вычислим

$$u(t,x) = \mathcal{F}_\alpha^{-1}(e^{-\alpha^2 t}\tilde{f}(x))$$

и получим явную формулу (формулу Пуассона) для решения задачи (1) (2). Это вычисление в сильной степени опирается на материал предыдущей лекции. Напомним, что

$$\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}S = \frac{1}{2\pi}S\mathcal{F}.$$

Поэтому

$$u(t,x) = \mathcal{F}_\alpha^{-1}(v(t,\alpha)) = \frac{1}{2\pi}S\mathcal{F}_\alpha v(t,\alpha).$$

Ниже мы пишем просто $\mathcal{F}$ вместо $\mathcal{F}_\alpha$. Имеем:

$$S\mathcal{F}v(t,\alpha) = S\mathcal{F}(e^{-\alpha^2 t}\tilde{f}(\alpha)) = \frac{1}{2\pi}S(\mathcal{F}e^{-\alpha^2 t} * \mathcal{F}\tilde{f}) = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}Se^{-\alpha^2 t} * \mathcal{F}S\tilde{f}).$$

Отметим, что

$$\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}S\tilde{f} = \mathcal{F}^{-1}\tilde{f} = f.$$

Далее, функция $e^{-\alpha^2 t}$ - четная как функция от α; поэтому $Se^{-\alpha^2 t} = e^{-\alpha^2 t}$. Итак,

$$S\mathcal{F}v(t,\alpha) = \mathcal{F}e^{-\alpha^2 t} * f.$$

Следовательно,

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}e^{-\alpha^2 t} * f). \tag{4}$$

Обозначим через $P(t,x)$ *ядро Пуассона:*

$$P(t,x) = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}e^{-\alpha^2 t}) \tag{5}$$

Мы доказали,что

$$u(t,x) = P(t,x) * f(x) \tag{6}$$

Запишем явно ядро Пуассона. Преобразование Фурье от $e^{-\alpha^2 t}$ уже вычислялось на занятиях. Повторим это вычисление. На прошлой лекции доказано, что

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{\alpha^2}{2}}) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Кроме того, если $g(x) = f(\lambda x)$, то

$$(\mathcal{F}g)(\alpha) = \frac{1}{\lambda}\mathcal{F}f(\frac{\alpha}{\lambda}). \tag{7}$$

Обозначим через $f_0(x)$ функцию $e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$. Тогда

$$e^{-\alpha^2 t} = f_0(\alpha\sqrt{2t}).$$

Полагая в формуле (7) $\lambda = \sqrt{2t}$, получаем:

$$\mathcal{F}e^{-\alpha^2 t} = \frac{1}{\sqrt{2t}}\mathcal{F}f_0\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2t}}f_0\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Окончательно,

$$P(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left(e^{-\frac{x^2}{4t}}\right), \tag{8}$$

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \cdot f(y)dy. \tag{9}$$

Это знаменитая формула Пуассона для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.

4 Что же доказано?

Предыдущее рассуждение оперирует с функцией u, которая с самого начала удовлетворяет условиям (1) и (2). Тем самым, мы доказали теорему

Теорема 1 *Если задача Коши для уравнения теплопроводности с финитным начальным условием имеет решение, то оно задается формулами* (8), (9).

Мы же хотим получить формулу для решения, существование которого не известно a priori.

Теорема 2 *Формулы* (8), (9) *задают решение Коши* (1), (2) *с ограниченным непрерывным начальным условием.*

Отметим, что требование на начальное условие в этой теореме слабее, чем в предыдущей. Преобразование Фурье от ограниченной непрерывной функции может вообще не существовать.

Доказательство Проверим поочередно начальное условие и уравнение.

5 Стремление к начальному условию

Отметим, что при $t = 0$ формула (9) не имеет смысла. Проверим, однако, что функции u, заданной формулой (9) и для любой последовательности $t_n \to 0$,

$$u(t_n, x) \rightrightarrows f(x), \tag{10}$$

если f непрерывно и ограничено. Для этого докажем, что последовательность функций

$$\Delta_n(x) = P(x, t_n),$$

где P - ядро Пуассона, при $t_n \to 0$ – δ-образная. Воспользуемся теоремой из лекции 3: если функция φ неотрицательна, и ее интеграл по всей прямой равен 1, то последовательность функций $\frac{1}{t_n}\varphi\frac{x}{t_n}$ - δ -образная (в лекции вместо $\frac{1}{t_n}$ было n, но это не составляет никакой разницы). Воспользуемся не окончательной, а промежуточной формулой для ядра Пуассона:

$$P(t, x) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2t}}\mathcal{F}(f_0)\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right).$$

Напомним, что $f_0 = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$. Функция

$$\varphi(x) = P(\frac{1}{2}, x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(f_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f_0$$

непрерывна, неотрицательна, и ее интеграл по всей прямой равен 1. Поэтому последовательность

$$\Delta_n(x) = P(t_n, x)$$

при $t_n \to 0$ – δ-образная. Это доказывает (2).

График функции φ напоминает колокол, края которого растянуты на всю прямую. График функции Δ_n тоже напоминает колокол, но более узкий и высокий; этот график с ростом n становится все более похожим на острый пик. Эта последовательность графиков настолько популярна, что она была изображена на обложке одного из распространенных учебников по теории уравнений с частными производными.

6 Проверка решения.

Проверим, что функция (6) удовлетворяет уравнению тиеплопроводности.

Первый способ: лобовой - прямая подстановка.

Интеграл (9) для ограниченной непрерывной функции f сходится, поскольку при любом фиксированном $t > 0$ ядро Пуассона $P(t, x)$ убывает при $x \to \infty$ быстрее любой степени, вместе со всеми своими производными. Поэтому при подстановке u в уравнение (1) можно дифференцировать под знаком интеграла. Равенство

$$P_t = P_{xx} \tag{11}$$

проверяется непосредственно.

Второй способ - косвенный. Равенство (11) равносильно равенству

$$\mathcal{F}(P_t) = \mathcal{F}(P_{xx}).$$

Но, в силу (5)

$$\mathcal{F}(P) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}^2(e^{-\alpha^2 t}) = e^{-\alpha^2 t},$$

$$\mathcal{F}(P_t) = (\mathcal{F}P)_t = -\alpha^2 e^{-\alpha^2 t},$$

$$\mathcal{F}(P_{xx}) = -\alpha^2 \mathcal{F}(P) = -\alpha^2 e^{-\alpha^2 t},$$

Уравнение (1) для u проверено.

$\square$