Лекция 6.
Модель группы S_n

А.А. КИРИЛЛОВ

1. Общее описание

1.1. **Представления с простым спектром.** В этом разделе мы будем рассматривать унитарные представления π конечной группы G в Гильбертовом пространстве V.[1]

Мы говорим что представление π имеет **простой спектр**, если это прямая сумма попарно неэквивалентных унепредов. Такие представление описываются простым алгебраическим условием.

Предложение 1. *Представление (π, V) имеет простой спектр если и только если алгебра алгебра сплетающих операторов*
$I(\pi, \pi) = End_G(V)$ коммутативна.

Доказательство. Пусть $V = \oplus_k V_k$ - это разложение V на неприводимые подпространства. Выберем ортогональный базис B_k в каждом V_k и пусть $B = \bigcup B_k$. Тогда B будет ортогональным базисом в V. Мы можем предположить что для каждой пары эквивалентных подпредставлений $(\pi|_{V_i}, \pi|_{V_j})$ базисы B_i, B_j выбираются так, что матрицы $\pi(g)|_{V_i}$ и $\pi(g)|_{V_j}$ совпадают. Тогда каждый сплетающий оператор A в V имеет матрицу блочного вида с блоками $A_{k,l} \in \mathrm{Hom}_G(V_k, V_l)$, нулевыми когда $\pi|_{V_k}$ и $\pi|_{V_l}$ неэквивалентны и могут быть любыми скалярными матрицами $c_{k,l} \cdot 1$, когда $\pi|_{V_k} \simeq \pi|_{V_l}$.

Мы видим что алгебра $I(\pi, \pi)$ изоморфны $\oplus_k \mathrm{Mat}(\mu_k, \mathbb{C})$, где μ_k - кратные неприводимых компонент. □

1.2. **Большие подгруппы.** Подгрупп H конечной группы G называется **большой**, если следующие эквивалентные условия выполнены.

1. Для всякого унепреда π группы G, ограничение $\mathrm{Res}_H^G \pi$ имеет простой спектр.

2. Для каждого унепреда ρ подгруппы H, индуцированное представлние $\mathrm{Ind}_H^G \rho$ имеет простой спектр.

Date: Весна 2019.

[1]Вообще, обозначения, воодимые нами ниже имеют смысл и для более общего контекста, а именно, - для непрерывных унитарных представлений компактных топологических групп. Большая часть утверждений будет верна и там.

Эквивалентной утверждений следует из формулы Фробениуса

$$(1) \qquad i(\mathrm{Res}_H^G \pi,\, \rho) = i(\pi,\, \mathrm{Ind}_H^G \rho).$$

Упражнение 1. Пусть H, K это подгруппы G. Если $H \subset K \subset G$ и H - это большая подгруппа G, тогда K - тоже.

Упражнение 2. * Пусть $\mathbb{C}[G]^H$ - подалгебра в групповой алгебре $\mathbb{C}[G]$, состоящей из функций f, удовлетворяющих

$$f(hgh^{-1}) = f(g) \quad \text{для всех} \quad h \in H,\, g \in G.$$

Подгруппа H большая, если и только если подалгебра $\mathbb{C}[G]^H$ коммутативна.

Известные примеры. В следующих парах кождая группа - большая подгруппа для последующей размерности $n \geq 1$:

$$S_n \subset S_{n+1}, \qquad S_2 \times S_n \subset S_{n+2}, \qquad U_n \subset U_{n+1},$$
$$U(1) \subset SU(2) \qquad SU_{n+1} \subset SU_{n+2}, \qquad Spin_{n+2} \subset Spin_{n+3}.$$

1.3. **Определение модели представления.** Представление π конечной группы G, называется **моделью** для G, если его разложение на унепреды содержит каждый тип с кратностью ровно 1. Заметим что это определение имеет смысл также и для непрерывных предтавлений компактных групп. Первый пример, который послужил вдохновляющим для этого понятия - это представление $G = SO(3, \mathbb{R})$ в $L^2(S^2)$. Здесь неприводимые компоненты имеют размерность $2k + 1$ и состоят из однорожных мнгочленов степени k с переменными x, y, z. В дальнейшем было открыто множество иных примеров модельных представлений (см. [**?**, **?**,][],[]).

Упражнение 3. Покажите что регулярное представление G в $\mathbb{C}[G]$ имеет простой спектр если и только если группа G коммутативна.

2. Базовые факты о S_n

2.1. **Обозначения и определения.** Группа S_n перестановок n объектов - самое важное и самое изученное семейство конечных групп. По определению, это группа автоморфизмов X_n, конечного множества с n элементами. Обычно X_n строится как $\{1, 2, \ldots, n\}$, так что имеют место естественные включения:

$$X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_n \subset \ldots \qquad \text{и} \qquad S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_n \subset \ldots.$$

Есть несколько способов описать элементы $s \in S_n$:

a) Как биективную функцию $k \mapsto s(k)$, $1 \leq k \leq n$.

b) Как вектор-строку $\Big(s(1), s(2), \ldots, s(n)\Big) \in \mathbb{N}^n$.

c) Как граф $\Gamma(s)$ формы $\begin{matrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{matrix}$, где множество V вершин - это объединение двух копий (верхней и нижней) X_n, а множество A стрелок состоит из a_k, $1 \le k \le n$,, соединяющих верхнюю копию k с нижней копией $s(k)$.

Пара $(i, j) \subset X_n \times X_n$ называется **инверсией** для $s \in S_n$, если $i < j$ и $s(i) > s(j)$. Число инверсий называется **длиной** s и обозначается как $l(s)$. Оно равно числу точек пересечения для стрелок в $\Gamma(s)$.

Предложение 2. *Функция* $\operatorname{sgn} s = (-1)^{l(s)}$ *мультипликативна:*

$$\operatorname{sgn}(s_1 s_2) = \operatorname{sgn}(s_1) \cdot \operatorname{sgn}(s_2)$$

и является единственным нетривиальным характером S_n.

2.2. **Подгруппы и классы смежности.** Для всякого разбиения множества X_n на дизъюнткные части $X_1, \dots, X_k$ обозначим как $Y_{X_1,\dots,X_k}$ подгруппу S_n, состоящую из перестановок, сохраняющих разбиение. Подгруппы такого рода называются **подгруппами**
Юнга. Как абстрактные группы, они опеределны с точностью до изоморфизма числами $\lambda_i = |X_i|$, $1 \le i \le k$, и изоморфны одной из групп $Y_\lambda := S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_k}$.

Со всякой стандартной таблицей Юнга T мы ассоциируем две подгруппы Юнга: $Y_{row}(T)$ (соотв. $Y_{col}(T)$) которые соответствуют разбиениям X_n на строки (соотв. столбцы) таблицы T. С точностью до изоморфизма они определены соответсвующими диаграммами Юнга D (или разбиениями $\lambda(D)$ и $\lambda^*(D)$).

Введём также обозначение $s_{row}(T)$ (соотв. $s_{col}(T)$) для элемента $s \in S_n$, который переставляет циклически элементы каждой строки (соотв. каждого столбца) T. Иногда, эти элементы называются **горизонтальными** (соотв. **вертикальными**) перестановками.

Хорошо известно что всякий класс смежности $C \subset S_n$ содержит горизонтальные (соотв. вертикальные) перестановки для соответствующей таблицы T. Более того,

Предложение 3. *Существует биекция между классами смежности в* S_n *и разбиениями* $\lambda \in \mathcal{P}_n$*, такая чтр класс* C_λ *содержит горизонтальную перестановку для таблицы* T *типа* λ *(соотв. вертикальную перестановку для таблицы* T *двойственного типа* λ^**).*

2.3. **Представление S_n, индуцированное подгруппами Юнга.** Пусть λ - это разбиение n. Обозначим как $\mathcal{X}_\lambda$ множество всех разбиений множества $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ на дизъюнктные части мощностей $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Ясно что группа S_n действует транзитивно на $\mathcal{X}_\lambda$ и стабилизатор точки

$(X_1, \ldots, X_k)$ - это подгруппа Юнга, которую выше мы обозначали как $Y(X_1, \ldots, X_k)$, or Y_λ.

Рассмотрим два типа индуцированных представлений S_n:

$$\Pi_\lambda = \mathrm{Ind}_{Y_\lambda}^{S_n} 1 \quad \text{и} \quad \Pi'_\mu = \mathrm{Ind}_{Y_\mu}^{S_n} \mathrm{sgn} \simeq \Pi_\mu \otimes \mathrm{sgn}\,.$$

Вычисление сплетающих чисел для этих представлений - это красивая теоретико-групповая (и комбинаторная) проблема. Для описания результата мы должны ввести частичный порядок на меножестве $\mathcal{P}_n$ разбиений. Будем говорить что μ предсшествует λ и записывать как $\lambda \succeq \mu$ если

$$(2) \qquad \lambda_1 + \cdots + \lambda_k \geq \mu_1 + \cdots + \mu_k \quad \text{для всех} \quad k \geq 1.$$

Пусть $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_n$ будет разбиениями.

Предложение 4. *Таблица сплетающих чисел для прдеставлений Π_λ и Π'_μ имеет унитреугольную форму:*

$$(3) \qquad i(\Pi_\lambda, \Pi'_\lambda) = 1 \quad \textit{и} \quad i(\Pi_\lambda, \Pi'_\mu) = 0 \ \textit{пока}\ \lambda \succeq \mu.$$

Доказательство основано на следующем комбинаторном факте.

Лемма 1. *Пусть μ не прешествует λ. Тогда для всякой стандартной таблицы T формы λ и всякой стандартной таблицы T' of формы μ, имеется два числа $i, j \in X_n$ таких что они расположены в одной строке T и одном столбце T'.*

Как следствие, мы получим биекцию между множеством $\hat{S_n}$ (классов эквивалентности) унепредов S_n и мнржеством $\mathcal{P}_n$ разбиений n.

В самом деле, первое отношение (3) означает что (приводимые) представления Π_λ и Π'_λ имеют единственный общий унепред. Обозначим этот общий унепред как π_λ. Пространство V_λ этого представления содержит единственный (с точностью до скалрного фактора) вектор v_λ^+, инвариантный относительно всех операторов $\pi_\lambda(g)$, $g \in Y_\lambda$. Он также содержит единственный (с точностью до скалярного фактора) вектор v_λ^-, инвариантный относительно всех операторов $\pi'_\lambda(g)$, $g \in Y_\lambda$.

3. Векторные расслоения и индуцированные представления

Пусть G - это группа и $H \subset G$ - подгруппа. Имеется естественный **функтор ограничения** Res_H^G из категории всех представлений G, в категорию $\mathcal{R}ep(H)$.

Понятие индуцированного представления было вееденo Фробениусом (G.Frobenius) как двойственный функтор Ind_H^G из $\mathcal{R}ep(H)$ в $\mathcal{R}ep(G)$, удовлетворяющий **формуле двойственности**:

$$(4) \qquad i(\mathrm{Res}_H^G \pi, \rho) = i(\pi, \mathrm{Ind}_H^G)\rho \quad \text{для всех} \quad \pi \in \mathcal{R}ep(G),\ \rho \in \mathcal{R}ep(H).$$

Геометрическая версия этой конструкции основана на понятии векторного расслоения, вводимого ниже.

3.1. **Векторные расслоения.** n-мерным комплексным **векторным расслоением** L над топологическим пространством X называется топологическое пространство L, снабжённое непрерывным отображением $p : L \to X$, таким что для всякого $x \in X$ **слой** $F_x = p^{-1}(x)$ имеет структуру n-мерного комплексного векторного пространства.

Такие расслоения образуют категорию, где **морфизм** из $(L_1 \overset{p_1}{\to} X_1)$ в $(L_2 \overset{p_2}{\to} X_2)$ образует коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} L_1 & \xrightarrow{\phi} & L_2 \\ \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle p_2} \\ X_1 & \xrightarrow{\psi} & X_2 \end{array}$$

где ϕ и ψ – это непрерывные отображения с дополнительным условием: ограничение ϕ на каждый слой F_x – это линейный оператор из F_x в $F_{\psi(x)}$.

Примечание. В большинстве приложений множества L и X предполагаются гладкими многообразиями, проекция p гладкая, а расслоение локально тривиально.

Последнее условие означает что любая точка $x \in X$ имеет окрестность $U \ni x$, такую что $p^{-1}(U)$ изоморфно тривиальному слою $L_0 = U \times \mathbb{C}^n$ с естественной проекцией в U. Получается коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} L_0 & \xrightarrow{\phi} & U \times \mathbb{C}^n \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{\iota} & U \end{array}$$

где ι - это включение, и для всякого $x \in U$ ограничение ϕ на слой F_x – это изоморфизм F_x на $\{x\} \times \mathbb{C}^n$.

Пусть $U \subset X$ – это подмножество. Отображение $s : U \to L$ называется сечением L на U если композиция $p \circ s = \mathrm{Id}_U$. Другими словами, для всякой точки $x \in U$ точка $s(x)$ принадлежит слою F_x. Множество всех сечений L на U обозначается как $\Gamma(L, U)$. Это естественное обощение пространства векторов-функций $\mathrm{Fun}(U, \mathbb{C}^n)$.
(Заметим, что для тривиальных расслоений эти обозначения совпадают.)

3.2. **G-расслоения над G-множествами.** Векторное расслоение L над правым G-множеством называется G-**расслоением**, если G действует также на L (тоже справа) и

1. Оно коммутиует с проекцией $p : L \to X$.
2. Ограничение G-действия на каждый слой - это линейное отображение.

В пространтсве $\Gamma(L,\, X)$ возникает линейное представление Π группы G. Оно действует сдвигами аргумента:

$$\Big(\Pi(g)\gamma\Big)(x) = \gamma(x \cdot g). \tag{5}$$

Когда расслоение L тривиально и размерности 1, верхняя формула даст просто геометрическое представление G в пространстве комплексных функций $\mathrm{Fun}(X,\, \mathbb{C})$.

Самый интересный случай когда G-множество X однородно. Обозначения несколько упростятся если мы будем предполагать что X – это правое G-множество, следовательно, изоморфно правому смженому пространству $H\backslash G$. Ниже мы рассмотрим этот случай подробнее.

Для изучения сечений L, нам нужно записать эти сечения в удобном виде. Обозначим за $x_0 \in X$ начальную точку (сопряжённое $H\backslash H$ в $H\backslash G$) и за W слой F_{x_0}. Выберем базис $B = (e_1,\, \ldots,\, e_n)$ в W.

Используя действие элемента $g \in G$, мы можем привести этот базис к базису $B \cdot g = (e_1 \cdot g,\, \ldots,\, e_n \cdot g)$ в слое $F_{x \cdot g} = W \cdot g$. Сечение $\gamma \in \Gamma(L,\, X)$ определяется вектор-функцией $w_\gamma = (w^1_\gamma, \ldots, w^n_\gamma)$ на G, заданной

$$w^i_\gamma(g) = (\gamma(x_0 \cdot g),\, e_i \cdot g). \tag{6}$$

Но не всякая вектор-функция ассоциирована с сечением.

Предложение 5. *Пусть (ρ, W) – это представление $H = Stab(x_0)$ на слое W над x_0. Вектор-функции w на G соответствует сечение расслоения L над X, тогда и только тогда когда она удовлетворяет соотношению*

$$w(hg) = \rho(h) w(g). \tag{7}$$

Доказательство. По определению ρ, базисы $B \cdot h$ и B связаны соотношением

$$B \cdot h = (e_1 \cdot h,\, \ldots,\, e_n \cdot h) = (\rho(h)e_1, \ldots, \rho(h)e_n) = \rho(h)B. \tag{8}$$

Применяя дейтвие g к этому соотношению, мы получаем $B \cdot hg = \rho(h) B \cdot g$, которое влечёт (7) и показывает необходимость этого условия. Достаточность следует из явной формулы $\gamma(x_0 \cdot g) = w^i(g) e_i \cdot g$.

Предложение 6 (Следствие)**.** *Имеется естсественная биекция между (классами эквивалентности) n-мерных G-расслений над $X = H\backslash G$ и (классами эквивалентности) n-мерных комплексных представлений H.*

Обозначим L_ρ расслоение, соответствующее $\rho \in \mathcal{R}ep(H)$.

Теорема 1. *Представление Π группы G в пространстве $\Gamma(L_\rho, X)$, определенное (5), эквивалентно индуцированному представлению $Ind^G_H \rho$.*

Доказательство. Мы покажем что Π обладает характеристическим свойством индуцированных представлений, т.е. удовлетворяет формуле Фробениуса (1), где Π стоит на месте $Ind_H^G\rho$:

$$i(\mathrm{Res}_H^G\pi,\,\rho)=i(\pi,\,\Pi).$$

Для доказательства, мы установим явное соответствие между двумя пространствами сплетающих операторов: $I(\mathrm{Res}_H^G\pi,\,\rho)$ и $I(\pi,\,\Pi)$.

Пусть V – это пространство представлений π. По определению, оператор $A\in I(\pi,\,\Pi)$ отправляет вектор $v\in V$ в некоторое сечение векторного расслоения L_ρ, которое мы обозначим γ_v. Свойство сплетения даёт: $\gamma_{\pi(g)v}=\Pi(g)\gamma_v$, или

$$\gamma_{\pi(g)v}(x)=\gamma_v(xg)\quad\text{для всех}\quad x\in X,\,g\in G.$$

Сечение γ_v определяет вектор-функцию на G, которую мы обозначим как $w_v(g)$. G-действие на L_ρ в терминах этих вектор-функций выглядит как $w_{\pi(g)v}=\Pi(g)w$.

Наконец, будем ассоциировать с A оператор $\widetilde{A}:V\to W$, который отправляет $v\in V$ в значение $w_v(e)\in W$.

Мы должны проверить что $\widetilde{A}$ принадлежит $i(\mathrm{Res}_H^G\pi,\,\rho)$ и соответствие $A\to\widetilde{A}$ – это биекция. Свойство сплетения $\widetilde{A}$ следует из:

$$\widetilde{A}\pi(h)v=w_{\pi(h)v}(e)=w_v(h)=\rho(h)w_v(e)=\pi(h)\widetilde{A}v.$$

Далее, каждый оператор B из $i(\mathrm{Res}_H^G\pi,\,\rho)$ имеет форму $\widetilde{A}$, где A – это оператор, отправляющий $v\in V$ в сечение $\gamma(x_0{\cdot}g)=\pi(g)Bv$.

4. Инволюции в S_n и представления моделей

4.1. **Инволюции.** В этом разделе будет называть **инволююцией** любую перестановку $s\in S_n$, удовлетворяющую $s^2=e$ (включая саму e). Ясно что тип цикла этой перестановки 1^k2^l, $k+2l=n$. Класс сопряжённости $C[s]$ – это однродное S_n-множество, изоморфное однородному пространству $S_n/Z(s)$, где $Z(s)$ – это централизатор элемента $s\in S_n$.

Для того чтобы описать централизатор $Z(s)$, рассмотрим сперва крайние случаи $n=k$ и $n=2l$. В первом случае $s=e$ и $Z(s)=S_n$. Во втором случае мы понимаем X_{2l} как множество $X'_{2l}=\{\pm1,\pm2,\ldots,\pm l\}$ и считаем $s(i)=-i$. Централизатор $Z(s)$ содержит перестановки двух типов:

$$a)\; s(i)=\mathrm{sgn}(i)\cdot\sigma(|i|),\ \text{где}\ \sigma\in S_l,\qquad b)\; s(i)=\varepsilon(i)\cdot i,\ \varepsilon(i)=\pm1.$$

Перестановки типа a) образуют группу, изоморфную S_k, а перестановки другого типа образуют группу, изоморфную $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l$. Весь централизатор – это полупрямое произведение этих двух групп: $C_l\simeq S_l\ltimes(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l$. (группа C_l изоморфна полной симметрической группе l-мерного куба).

В общем случае, когда $n=k+2l$, централизатор $\mathbb{Z}(s)$ – это полупрямое произведение $S_k\ltimes C_l$. Его мощность – это $\frac{|S_n|}{|S_k|\cdot|C_l|}=\frac{(k+2l)!}{k!\,(2l)!!}$.

5. Универсальное линейное расслоение над $Inv(S_n)$

Всё множество $Inv(S_n)$ инволюций в S_n – это дизъюнткное объединение подмножеств $Inv_l(S_n)$, $0 \leq l \leq \frac{n}{2}$,, являющимися просто классами сопряжённости $C_{1^k 2^l}$, $k + 2l = n$. Определим S_n-линейное расслоение L над $Inv(S_n)$ следующим образом.

Как было показано выше, комплексное G-расслоение L над однородным правым G-множеством $X = H \backslash G$ определяется действием подгруппы H в слое $F_{x_0} \simeq \Gamma\mathrm{x}_0 \in X$.

В нашем случае это действие задано семейством χ характеров $\{\chi_l\}$, $0 \leq l \leq n/2$. Пространство $\Gamma(Inv_l(S_n),\, L\chi_l)$ сечений L на $Inv_l(S_n)$ можно отождествить с пространством комплекснозначных функций φ на S_n, удовлетворяющих

$$\varphi(gh) = \chi_l(h)\varphi(g), h \in S_k \rtimes C_l, \tag{9}$$

что является частным случаем (7), где представление ρ одномерно.

Теорема 2 (А.А,Клячко (A.A.Klyachko))**.** *Определим характер χ_l $S_k \rtimes C_l$ как тривиальный на S_k и как* sgn *на C_l. Тогда простарнство*

$$\Gamma(L\chi,\, Inv(S_n)) = \oplus_{l=0}^{[n/2]} \Gamma(L\chi_l,\, Inv_l(S_n))$$

будет моделью для S_n.

□

Пример 1. Для $n = 3$ имеем $Inv_0 = \{e\}$, $Inv_1 = \{(1,2),\, (2,3),\, (1,3)\}$.

Линейное расслоение L_χ над Inv_0 тривиально и в пространстве $\Gamma(Inv_0,\, \chi_0)$ реализуется тривиальное представление π_0 (как геометрическое представление) .

Линейное расслоение L_χ над Inv_1 соответствует характеру sgn и является тензорным произведением геометрического представления в $\mathrm{Fun}(Inv_1)$ и одномерного представления $\pi_1 = sgn$. Поэтому, в пространстве $\Gamma(Inv_0,\, \chi_0$ реализовано приводимое представление $\pi_1 \oplus \pi_2$

Пример 2. При $n = 4$ будем иметь

$Inv_0 = \{e\}$, $\quad Inv_1 = \{(1,2),\, (1,3),\, (1,4),\, (2,3),\, (2,4),\, (3,4)\}$,

$Inv_2 = (12)(34),\, (13)(24),\, (14)(23)$.

Здесь снова, в сечениях L_χ над Inv_0 действует тривиальное представление π_0 .

3-мерное представление в пространстве сечений L_χ над Inv_2 – вновь тензорное произведение геметрического представления в $\mathrm{Fun}(Inv_2)$ и одномерного представления $\pi_1 = sgn$. Поэтому, получаем разбиение вида $\pi_1 \oplus \pi_2$.

Наокнец, 6 мерное представление в простанстве сечений L_χ над Inv_1 – это сумма двух 3-мерных унепредов S_4.

Было бы интересно описать явно распределение унепредов S_n между $[n/2]$ пространствами $\Gamma(L_\chi,\ Inv_l(S_n))$.

E-mail address: kirillov@math.upenn.edu