Лекция 11-19. Одномерное волновое уравнение и начала многомерного анализа Фурье

1 Постановка задачи Коши для уравнения колебаний струны

Неограниченная струна - это прямая, точки которой могут совершать колебания, смещаясь параллельно некоторой прямой, перпендикулярной струне. Пусть смещение точки x в момент t равно $u(t,x)$. Если функция u мала вместе с первыми производными, то колебания струны подчиняются уравнению

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}; \tag{1}$$

коэффициент a может быть сделан равным 1 за счет изменения масштаба. Чтобы однозначно задать процесс колебаний струны, нужно указать начальные условия:

$$u|_{t=0} = f,\ u_t|_{t=0} = g.$$

2 Задача Коши для преобразования Фурье от неизвестной функции

Перейдем, как и раньше, к преобразованию Фурье по x от u:

$$v(t,x) = \mathcal{F}_x u(t,x).$$

Получим:

$$v_{tt} = -\alpha^2 v,\ v(0) = \tilde{f}(\alpha),\ v_t(0) = \tilde{g}(\alpha).$$

Эта задача мгновенно решается:

$$v(t,\alpha) = \tilde{f}(\alpha)\cos\alpha t + \frac{\tilde{g}(\alpha)}{\alpha}\sin\alpha t.$$

Снова успех! Преобразование Фурье от искомой функции найдено. Осталось только его обратить.

3 Формула Даламбера

Заметим, что

$$\mathcal{F}^{-1}(\tilde{f}(\alpha)e^{i\alpha a})(x) = \frac{1}{2\pi}\int \tilde{f}(\alpha)e^{i\alpha(x+a)}d\alpha = f(x+a).$$

Поэтому

$$\mathcal{F}^{-1}(\tilde{f}(\alpha)\cos\alpha t) = \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}(\tilde{f}(\alpha)(e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t})) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t)).$$

Далее, напомним, что

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g.$$

Поэтому

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g) = f * g.$$

Напомним также, что

$$\frac{\sin\alpha t}{\alpha} = \frac{1}{2}\mathcal{F}(\chi_{[-t,t]}).$$

Поэтому

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\tilde{g}\frac{\sin\alpha t}{\alpha}\right) = \frac{1}{2}g * \chi_{[-t,t]} = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)dy.$$

Окончательно,

$$u(x,t) = \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)dy.$$

Это и есть знаменитая формула Даламбера.

Задача 1 *Проверьте, что для C^2-гладких начальных условий f и g функция u, заданная этой формулой, удовлетворяет уравнению и начальным условиям.*

4 Мультииндексные обозначения

5 Ряды Фурье для многомерного тора

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$$

Теорема 1 $E = \{e^{ikx} | k \in \mathbb{Z}^n\}$ *– базис Рисса в* $L_2(\mathbb{T}^n)$.

Доказательство Ортогональность: $< e^{ikx}, e^{ilx} >= \int_{\mathbb{T}^n} e^{i(k-l)x}dx = \delta_{k,l}$. Последнее равенство доказывается с помощью повторного интегрирования. Полнота листемы E доказана ниже. □

Разложение в ряд Фурье (следствие теоремы Рисса).

Теорема 2 *Для любого* $f \in L_2(\mathbb{T}^n)$,

$$f(x) = \sum a_k e^{ikx},$$

$a_k = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} f(x)e^{-ikx}dx$. *Сходимость понимается в* $L_2(\mathbb{T}^n)$.

Доказательство Следует из теоремы Рисса и того, что

$$||e^{ikx}||^2 = (2\pi)^n.$$

□

6 Полнота системы E

Лемма 1 *Определенная выше система E полна в $L_2(\mathbb{T}^n)$.*

Доказательство Докажем лемму для $n = 2$. Для произвольного n доказательство проводится индукцией по размерности с помощью точно тех же рассуждений.

Предположим противное. Рассмотрим множество всех линейных комбинаций функций из системы E и замкнем это множество. Получим замкнутое линейное подпространство пространства $L_2(\mathbb{T}^2)$. По нашему предположению, оно не совпадает со всем пространством. Следовательно, у него есть ненулевое ортогональное дополнение. Возьмем произвольную функцию f из этого дополнения. Она ортогональна всем функциям из системы E

$$(f, e^{i(kx+ly)}) = 0 \forall (k,l) \in \mathbb{Z}^2. \tag{2}$$

Мы приведем это утверждение к противоречию. Положим:

$$f_y = f|_{S^1 \times \{y\}}, F_k(y) = (f_y, e^{ikx})$$

Скалярное произведение берется в $L_2(S^1)$. В дальнейшем мы опускаем такие комментарии, поскольку пространство, в котором берется скалярное произведение, видно из контекста. По теореме Фубини, функция F_k суммируемая. Она также принадлежит $L_2(S^1)$. Действительно, по неравенству Коши-Буняковского,

$$|F_k(y)| \leq 2\pi \|f_y\|.$$

Далее,

$$\int_{S^1} |F_k(y)|^2 dy \leq C \int_{S^1} \|f_y\|^2 dy = C \int_{\mathbb{T}^2} |f(x,y)|^2 dx dy = C\|f\|^2.$$

По условию,

$$(f, e^{i(kx+ly)}) = (F_k, e^{ily}) = 0.$$

Значит, $F_k \perp e^{ily}$ для каждого l. Следовательно, $F_k \equiv 0$. Итак,

$$(f_y, e^{ikx}) = 0 \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому

$$f_y \equiv 0 \forall y.$$

Следовательно, $f \equiv 0$. □