Дополнительные главы алгебры. Листок к зачету-автомату в 4 модуле.

Сдача всех задач “без звездочки” из этого листка дает оценку 10 баллов (автоматом) за все зачетные мероприятия по курсу “Дополнительные главы алгебры” в 4 модуле. Любой пункт со звездочкой заменяет любые 2 пункта без звездочки. Дедлайн по этому листку 14 июня.

Задача 1. Пусть V – векторное пространство с симметрической билинейной формой B. *Алгебра Клиффорда* $CL(V,B)$ порождается базисом $x_1,\ldots,x_n$ векторного пространства V с определяющими соотношениями $x_ix_j+x_jx_i=B(x_i,x_j)$.

(а) Найдите размерность алгебры $CL(V,B)$;

(б) докажите, что если B – невырожденная форма над полем характеристики 0, то алгебра $CL(V,B)$ полупроста;

(в) Разложите эту алгебру в прямую сумму матричных над полем $\mathbb{C}$;

(г) над $\mathbb{R}$ в зависимости от сигнатуры формы B.

Задача 2. Ассоциативная алгебра над $\mathbb{C}$ задана образующими x,y и определяющими соотношениями $x^n=y^n=1$ и $xy=\xi yx$, где ξ – примитивный корень степени n из единицы.

(а) Найдите размерность этой алгебры;

(б) покажите, что она полупроста;

(в) разложите ее в прямую сумму матричных алгебр.

Задача 3. *Алгебра Гекке* $H_q(3)$ задана образующими T_1,T_2 с определяющими соотношениями $(T_i+q)(T_i-1)=0$ и $T_1T_2T_1=T_2T_1T_2$, где $q\in\mathbb{C}$ – параметр.

(а) Покажите, что эта алгебра полупроста при всех значениях q кроме конечного числа.

(б) Найдите все q, при которых она неполупроста;

(в) Во всех случаях, когда она полупроста, разложите ее в прямую сумму матричных.

Задача 4. **(а)** Приведите пример двух конечных групп, у которых наборы размерностей комплексных неприводимых представлений совпадают, а сами группы – неизоморфны.

(б) Тот же вопрос, но еще и наборы размерностей в разложении тензорных произведений неприводимых совпадают, а группы все равно неизоморфны.

Задача 5. Опишите все комплексные неприводимые представления группы G и найдите их характеры, если **(а)** $G=Q_8$; **(б)** $G=A_5$; **(в)*** $G=\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\ltimes Q_8$, где действие циклической группы переставляет i,j,k по циклу.

Задача 6. Опишите все неприводимые вещественные представления группы **(а)** Q_8; **(б)*** $G=\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\ltimes Q_8$ из предыдущей задачи.

Задача 7. **(а)** Докажите, что комплексные неприводимые представления прямого произведения конечных групп $G\times H$ суть тензорные произведения неприводимых представлений групп G и H.

(б) Верен ли аналогичный факт над $\mathbb{R}$?

Задача 8. Опишите все тела над $\mathbb{R}$.

Задача 9. Пусть G – конечная группа, V – ее неприводимое комплексное представление, $V_{\mathbb{R}}$ – овеществление этого представления. Покажите, что

(а) $\mathrm{End}_{\mathbb{R}G}V_{\mathbb{R}}=Mat_2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда на V имеется G-инвариантная симметрическая $\mathbb{C}$-билинейная форма;

(б) $\mathrm{End}_{\mathbb{R}G}V_{\mathbb{R}}=\mathbb{H}$ тогда и только тогда, когда на V имеется G-инвариантная кососимметрическая $\mathbb{C}$-билинейная форма;

(в) $\mathrm{End}_{\mathbb{R}G}V_{\mathbb{R}}=\mathbb{C}$, если на V нет G-инвариантных $\mathbb{C}$-билинейных форм.

(г) Пусть χ_V – характер представления V. Покажите, что *индикатор Фробениуса-Шура* $\frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}\chi_V(g^2)$ принимает значения 1, -1 или 0 в зависимости от трех случаев, определенных выше.

Задача 10. Разложите рациональную групповую алгебру $\mathbb{Q}G$ в прямую сумму матричных над телами, если **(а)** $G=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; **(б)** $G=D_n$; **(в)** $G=Q_8$;

(г)* $G=\widetilde{D_n}$, т.е. подгруппа в $SL_2(\mathbb{C})$, порожденная преобразованиями $a: x\mapsto \xi x,\ y\mapsto \xi^{-1}y$, где $\xi^n=1$, и $b: x\mapsto y,\ y\mapsto -x$.

Задача 11*. Приведите пример нечетномерного некоммутативного тела над $\mathbb{Q}$.

Задача 12. Пусть G – конечная p-группа.

(а) Покажите, что *идеал аугментации* $\{\sum\limits_{g\in G} a_g g \mid \sum\limits_{g\in G} a_g = 0\}$ является радикалом групповой алгебры $\mathbb{K}G$ группы G над любым полем $\mathbb{K}$ характеристики p.

(б) Опишите все неприводимые представления группы G над полем $\mathbb{K}$.

Задача 13. *(Теорема Веддерберна)* Докажите, что всякое конечное тело коммутативно.

Задача 14. Опишите все неприводимые представления группы S_3 над полем **(а)** $\mathbb{F}_2$; **(б)** $\mathbb{F}_3$; **(в)** $\mathbb{F}_5$. **(г)** Те же вопросы для группы A_3.

Задача 15*. Докажите, что характер неприводимого неодномерного комплексного представления конечной группы не может нигде не обращаться в нуль.

Задача 16. Опишите все неприводимые представления группы A_n.

Задача 17. Пусть G – конечная группа и V – какое-нибудь ее точное представление. Докажите, что в разложении тензорных степеней $V^{\otimes n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ встречаются все неприводимые представления группы G.

Задача 18*. Пусть V – представление симметрической группы S_n в пространстве $\mathbb{C}^n$ перестановками базисных векторов. **(а)** Укажите какой-нибудь базис в пространстве $\mathrm{Hom}_{S_n}(V^{\otimes k}, V^{\otimes l})$. **(б)** Выпишите операцию композиции

$$\mathrm{Hom}_{S_n}(V^{\otimes k}, V^{\otimes l}) \otimes \mathrm{Hom}_{S_n}(V^{\otimes l}, V^{\otimes m}) \to \mathrm{Hom}_{S_n}(V^{\otimes k}, V^{\otimes m})$$

в этом базисе.

Задача 19. Докажите, что ограничение любого комплексного неприводимого представления группы S_n на подгруппу H раскладывается в сумму неприводимых без кратностей, если **(а)** $H = S_{n-1}$ – подгруппа, сохраняющая элемент $n \in \{1, 2, \ldots, n\}$; **(б)** $H = S_{n-2} \times S_2$ – подгруппа, сохраняющая неупорядоченную пару элементов $\{n-1, n\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$.

Задача 20*. Найдите разложение в прямую сумму неприводимых ограничения модуля Шпехта группы S_n на **(а)** S_{n-1}; **(б)** $S_{n-2} \times S_2$.

Задача 21. Разложите в прямую сумму неприводимых комплексное представление группы $GL_2(\mathbb{F}_q)$, индуцированное **(а)** с тривиального представления подгруппы $B \subset GL_2(\mathbb{F}_q)$ нестрого верхнетреугольных матриц; **(б)** с произвольного одномерного представления той же подгруппы $B \subset GL_2(\mathbb{F}_q)$ **(в)*** Найдите характеры полученных неприводимых представлений.

Задача 22. **(а)** Найдите размерность алгебры эндоморфизмов квазирегулярного представления $PGL_3(\mathbb{F}_q)$ в пространстве $\mathbb{C}[\mathbb{F}_q\mathbb{P}^2]$;

(б) Тот же вопрос для квазирегулярного представления той же группы в пространстве $\mathbb{C}[Fl_3(\mathbb{F}_q)]$, где $Fl_3(\mathbb{F}_q)$ – множество полных флагов в трехмерном пространстве над $\mathbb{F}_q$;

(в)* Разложите два определенных выше представления в прямую сумму неприводимых и найдите размерности неприводимых слагаемых.