

Дополнительные главы алгебры. Задачи к семинару 9.

Задача 1. Опишите все полупростые конечнопорожденные модули над (а) \mathbb{Z} ; (б) $\mathbb{C}[x]$; (в) $\mathbb{C}[x, y]$; (г) $\mathbb{Z}[x]$ -модули, конечнопорожденные над \mathbb{Z} .

Задача 2. Укажите какой-нибудь (а) неполупростой; (б) неодномерный простой модуль над свободной алгеброй с двумя образующими над \mathbb{C} .

Задача 3. (а) Найдите все левые, правые и двусторонние идеалы алгебре $Mat_N(\mathbb{F})$ матриц над полем \mathbb{F} . (б) Опишите все конечнопорожденные модули над этой алгеброй.

(в) Те же вопросы для матричной алгебры над телом.

Задача 4. Какие из следующих колец полупросты? (а) $\mathbb{R}[x]/(x^2 + px + q)$ (в зависимости от p и q); (б) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (в зависимости от n); (в) $Mat_N(R)$, где R – кольцо из предыдущих пунктов; (г) кольцо верхнетреугольных матриц над полем; (д) кольцо матриц над полем, коммутирующих с данной матрицей (в зависимости от ее фробениусовой формы).

Задача 5. Опишите все простые модули над полупростыми кольцами из предыдущей задачи.

Задача 6. (а) Докажите, что кольцо комплексных матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ полупросто.

(б) Найдите его централизатор в алгебре $Mat_2(\mathbb{C})$.

(в) Не противоречит ли это теореме о двойном централизаторе?