Дополнительные главы алгебры. Задачи к семинару 10.

Задача 1. Докажите, что следующие алгебры изоморфны своим противоположным: **(а)** $Mat_n(\mathbb{K})$, где $\mathbb{K}$ – любое поле; **(б)** алгебра кватернионов $\mathbb{H}$; **(в)** групповая алгебра $\mathbb{K}G$, где $\mathbb{K}$ – любое поле. **(г)*** Приведите пример алгебры, не изоморфной своей противоположной.

Задача 2. Разложите в прямую сумму вещественных простых алгебр тензорные произведения алгебр **(а)** $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$; **(б)** $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$; **(в)** $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$.

Задача 3. Пусть A – центральная простая алгебра над полем $\mathbb{K}$ (т.е. такая простая алгебра над $\mathbb{K}$, что ее центр равен $\mathbb{K}$). Докажите, что алгебра $A \otimes_{\mathbb{K}} A^{op}$ есть матричная алгебра над $\mathbb{K}$.

Задача 4. Алгебра C порождена образующими x, y с соотношениями $xy = -yx$ и $x^2 = \pm 1$, $y^2 = \pm 1$. Докажите, что эта алгебра полупроста и разложите ее в прямую сумму матричных над телами, если основное поле равно **(а)** $\mathbb{C}$; **(б)** $\mathbb{R}$ (в зависимости от знаков). **(в)*** Те же вопросы для алгебры с образующими x, y, z и определяющими соотношениями $xy = -yx$, $xz = -zx$,$yz = -zy$ и $x^2 = \pm 1$, $y^2 = \pm 1$, $z^2 = \pm 1$.

Задача 5. Алгебра H порождена образующими x, y с соотношениями $xy = \omega yx$ (где ω – примитивный кубический корень из единицы) и $x^3 = 1$, $y^3 = 1$. Докажите, что эта алгебра полупроста и разложите ее в прямую сумму матричных (основное поле равно $\mathbb{C}$).

Задача 6. **(а)** Разложите групповую алгебру $\mathbb{C}S_3$ в прямую сумму матричных.

(б) Запишем таблицу умножения в группе S_3 в виде матрицы 6×6, коэффициентами которой являются 6 разных букв. Вычилите (разложите на неприводимые множители) определитель этой матрицы.

Задача 7. Разложите в прямую сумму простых групповую алгебру группы Q_8 **(а)** над $\mathbb{C}$; **(б)** над $\mathbb{R}$.