Материалы к семинарам по матанализу (четвёртый семестр)

13-я и 14-я недели (15.04 — 30.04.2019)

Примерные задачи семинаров

Базисы в L^2

Задача 7.1. Верно ли, что $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots$ порождают подпространство, плотное в L_2-метрике,
а) в пространстве нечётных L^2-функций на $[-\pi, \pi]$,
б) пространства $C_0(]0,\pi[)$ непрерывных функций на отрезке $[0,\pi]$, обращающихся в нуль на концах,
в) L^2-пополнения пространства $C_0(]0,\pi[)$?
г) В каких из пространств из пунктов а)–в) набор $\{\sin nx\}_{n\geqslant 1}$ является базисом? В каком смысле? Ортогонален ли он?

Задача 7.2. Найдите собственные функции оператора Лапласа d^2/dx^2 на отрезке $[0,l]$ со следующими граничными значениями:
а) $u(0) = 0$, $u(l) = 0$;
б) $u(0) = 0$, $u'(l) = 0$;
в) $u'(0) = 0$, $u'(l) = 0$.

Задача 7.3. Проверьте полноту в $L^2[0,l]$ систем собственных функций операторов из задачи 7.2.

Задача 7.4.* Пусть $p(x) \in C^1[0,l]$ и $q(x), r(x) \in C[0,l]$, $p(x) > 0$, $q(x) > 0$, $r(x) > 0$.

Рассмотрим оператор Штурма—Лиувилля

$$L = -r(x)\frac{d}{dx}(p(x)\frac{d}{dx}) + q(x)\colon D_L \to C[0,l] \subset L^2[0,l],$$

где $D_L = \{y(x) \mid y(x) \in C^2[0,l],\ y(0) = y(l) = 0\} \subset L^2[0,l]$.

а) Докажите, что оператор L самосопряжён в пространстве $L^2([0,l], dx/r(x))$, т. е.

$$(Ly_1, y_2)_{L^2([0,l],dx/r(x))} = (y_1, Ly_2)_{L^2([0,l],dx/r(x))}$$

для всех $y_1, y_2 \in D_L$. Выведите из самосопряжённости L вещественность его собственных значений и ортогональность его собственных функций, отвечающих различным собственным значениям.

б) Докажите, что оператор L положителен в пространстве $L^2([0,l], dx/r(x))$, т.е. $(Ly, y)_{L^2} > 0$ для всех $y \in D_L$, $y \neq 0$, а все его собственные значения положительны и однократны, т. е. каждому собственному значению соответствует одномерное подпространство собственных функций.

Уравнение теплопроводности

Задача 7.5. Докажите, что задача Коши для уравнения теплопроводности на окружности длины 2π с начальным условием класса C^2 имеет решение вида $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx-k^2t}$, где $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ — ряд Фурье для начального условия.

Задача 7.6. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для разложения в ряд решения предыдущей задачи Коши по системе CS.

Задача 7.7. Решите задачу Коши для уравнения теплопроводности на окружности длины 2π с начальным условием
а) $\sin^3 x$; б) $x^2 - \pi^2$ $(x \in [-\pi, \pi])$.

Задача 7.8. Решите следующую задачу для (однородного) одномерного уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < 1$: $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1} = 0$, $u(0,x) = x^2 - 1$.

Задача 7.9.* Концы стержня $[0,l]$ поддерживаются при постоянных температурах $u(t,0) = u_1$, $u(t,l) = u_2$, а начальная температура одинакова во всех точках стержня: $u(0,x) = u_0$. Найдите $\lim\limits_{t\to\infty} u(t,x)$.

Задача 7.10.* Концы стержня $[0,l]$ поддерживаются при постоянной нулевой температуре $u(t,0) = u(t,l) = 0$, начальная температура также равна нулю: $u(0,x) = 0$. Однако материал стержня выделяет тепловую энергию с постоянной скоростью (например, он радиоактивен). Напишите уравнение теплопроводности в этом случае, решите его и найдите $\lim\limits_{t\to\infty} u(t,x)$.

Волновое уравнение

Задача 7.11. Пусть функция $u(t,x)$ удовлетворяет волновому уравнению $u_{tt} = c^2 u_{xx}$.
а) Докажите, что «энергия не распространяется со скоростью больше c»: для любого отрезка $[a,b]$ и любого $t < (a+b)/2c$ верно, что

$$\int_a^b \frac{1}{2}(u_t^2(0,\xi) + u_x^2(0,\xi))\,d\xi \geq \int_{a+ct}^{b-ct} \frac{1}{2}(u_t^2(t,\xi) + u_x^2(t,\xi))\,d\xi.$$

б) Выведите отсюда, что любое решение задачи Коши для волнового уравнения выражается формулой Даламбера.

Задача 7.12. Решите задачу о колебании струны $0 < x < l$ с закрепленными концами, если в начальном положении струна находится в покое ($u_0 = 0$), а начальная скорость u_1 задается формулой:
а) $u_1 = v_0 = const$, $x \in [0,l]$;
б) $u_1 = \begin{cases} A\cos(2\pi(x-d)/2\varepsilon), & \text{если } |x-d| \leqslant \varepsilon, \\ 0, & \text{если } |x-d| > \varepsilon, \end{cases}$ где $\varepsilon > 0$, $d - \varepsilon \geqslant 0$, $d + \varepsilon \leqslant l$.

Задача 7.13. Решите следующие смешанные задачи:
а) $u_{xx} = u_{tt}$, $0 < x < l$, $u(t,0) = 0$, $u(t,l) = t$, $u(0,x) = u_t(0,x) = 0$;
б) $u_{xx} = u_{tt}$, $0 < x < 1$, $u(t,0) = t+1$, $u(t,l) = t^3 + 2$, $u(0,x) = x+1$, $u_t(0,x) = 0$.

Задача 7.14. Найдите решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ с граничными условиями $u(t,0) = u(t,l) = 0$ и начальными условиями $u(0,x) = \varphi(x)$ и $u_t(0,x) = \psi(x)$, где:
а)

$$\varphi(x) = \begin{cases} hx/d, & 0 \leq x \leq d, \\ h(l-x)/(l-d), & d \leq x \leq l, \end{cases} \qquad \psi(x) = 0,$$

(это модель щипково-клавишного инструмента, например, клавесина: струну оттянули за точку на расстоянии d от её конца и отпустили);
б)

$$\varphi(x) = 0, \qquad \psi(x) = \begin{cases} v, & \text{если } |x-d| \leqslant \varepsilon, \\ 0, & \text{если } |x-d| > \varepsilon, \end{cases}$$

(это модель ударно-клавишного инструмента, например, фортепиано: молоточек ширины 2ε бьёт по струне на расстоянии d от её конца).

в) Сравните убывание амплитуд гармоник (решений волнового уравнения, собственных относительно оператора Лапласа d^2/dx^2) в этих случаях, считая ε достаточно малым.
(Именно поэтому тембр фортепиано богаче, чем у клавесина.) Какой эффект на амплитуды гармоник оказывает размер ε (как меняется тембр самых высоких нот рояля, отвечающих коротким струнам)?

Продолжение преобразования Фурье в комплексную область

Задача 7.15. а) Выразите моменты функции $f(x)$ (т.е. величины $\int_{\mathbb{R}} x^n f(x)\,dx$ для целых $n \geqslant 0$) через коэффициенты Тейлора в нуле её преобразования Фурье.
б) Пусть $f(x)$ — финитная абсолютно интегрируемая функция. Докажите, что преобразование Фурье $\hat{f}(\lambda)$ продолжается до целой функции (т.е. голоморфной на всей комплексной плоскости).
в) Пусть $f(x) = 0$ при $x < 0$ и $|f(x)| < Ce^{-ax}$ при $x > 0$, где $a > 0$. Докажите, что в этом случае преобразование Фурье $\hat{f}(\lambda)$ продолжается до функции, аналитической в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda < a$.

Задача 7.16. Докажите, что преобразование Фурье функции $f(x)$ с $|f(x)| < Ce^{-a|x|}$ голоморфно в полосе $|\operatorname{Im}\lambda| < a$.