6. Более общее определение вероятности

▷ Пусть задано конечное множество M и каждому $m \in M$ поставлено в соответствие неотрицательное число $P(m)$, причём сумма всех этих чисел равна 1. Такая пара (M, P) называется *(конечным) вероятностным пространством. Вероятностью* события $A \subseteq M$ будем называть число $P(A) := \sum\limits_{m \in A} P(m)$.

Задача 6.1. Сформулируйте и докажите аналог правила
а) сложения; б) умножения
для вышеприведённого обобщения.

Задача 6.2. а) Один стрелок попадает в цель с вероятностью 0,8, другой — 0,7. Найдите вероятность поражения цели, если оба стреляют одновременно.
б) Рабочий обслуживает три станка. Вероятности их остановки равны соответственно 0,1; 0,2; 0,15. Найдите вероятность безотказной работы всех станков.
в*) Отец, мать и сын увлекаются шахматами. Отец обещает сыну приз, если он выиграет две партии подряд из трёх, сыгранных поочерёдно с отцом и матерью. Сын знает, что отец играет лучше матери. С кем ему выгоднее играть первую партию?

Задача 6.3. а) Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найдите вероятность того, что среди 6 детей не более 2 девочек.
б*) (Загадка) Старик ловил неводом рыбу ровно тридцать лет и три года. Каждый день он ловил ровно 7 рыб, которых как раз хватало на ужин. Живущий у старухи кот-долгожитель ест только макрель, которая ловится вдвое реже остальных рыб. В результате он 700 раз оставался голодным. Плавает ли макрель в море косяками или поодиночке?

Комментарий. Конечно, точно ответить на поставленный вопрос невозможно. Однако можно оценить, какая из двух гипотез лучше согласуется с данными.

▷ *Схемой Бернулли* из n испытаний с вероятностью успеха p (каждого испытания) называется множество $\{0,1\}^n$ упорядоченных наборов длины n из 0 и 1, вместе с функцией $P : \{0,1\}^n \to [0,1]$, определенной формулой $P(x) = p^{|x|}(1-p)^{n-|x|}$, где $|x|$ — количество единиц в наборе x, т.е. *число успехов* для набора x.

Задача 6.4. В схеме Бернулли из n испытаний с вероятностью успеха p найдите
а) вероятность ровно k успехов;
б) наиболее вероятное значение числа успехов.

▷ Пусть $A \subset M$ — подмножества прямой (или плоскости, или пространства), имеющие длину (или площадь, или объем). Тогда *вероятностью* подмножества A в M называется число

$$P(A) = P_M(A) := L(A)/L(M),$$

где $L(A), L(M)$ — длины (или площади, или объемы) подмножеств. Стоит иметь в виду, что не все подмножества имеют длину (или площадь или объём).

Задача 6.5*. Сформулируйте и докажите аналоги правил суммы и произведения для вышеопределенных «геометрических» вероятностей.

▷ В пунктах в) и г) следующей задачи имеются разные естественные формализации, дающие разный ответ! Покажите это!

Задача 6.6*. а) Дуэли в городе Осторожности редко кончаются печальным исходом. Дело в том, что каждый дуэлянт прибывает на место встречи в случайный момент времени между 5 и 6 часами утра и, прождав соперника 5 минут, удаляется. В случае же прибытия последнего в эти 5 минут дуэль состоится. Какая часть дуэлей действительно заканчивается поединком?

б) Стержень случайным образом ломают на три части. С какой вероятностью из этих частей можно составить треугольник?

в) Найдите вероятность того, что случайный треугольник является остроугольным.

г) С какой вероятностью случайная хорда в круге длиннее стороны вписанного в этот круг правильного треугольника?